Istituto Nazionale di Alta Matematica F. Severi

Prova scritta per il concorso a 40 borse di studio e 2 borse aggiuntive
per l'iscrizione ai corsi di Laurea Triennale in Matematica, anno accademico 2018-19

La prova consiste in sette quesiti a risposta multipla, tre quesiti a risposta numerica e tre problemi di cui si richiede lo svolgimento. Le risposte ai quesiti vanno fornite tramite lo schema nell'apposito foglio.
È ammesso l'uso di riga e compasso; è vietato qualsiasi strumento di calcolo o di comunicazione, così come la consultazione di testi o appunti. La durata della prova è di **tre ore e mezza**.

Si ricorda che è proibito, a pena di esclusione, scrivere il proprio nominativo o altri segni di riconoscimento, nei fogli contenenti il testo o lo svolgimento della prova; il nominativo va riportato esclusivamente nell'apposita busta piccola che dovrà essere sigillata.
Si fa inoltre presente che le domande della prova non sono disposte in ordine di difficoltà.

QUESITI A RISPOSTA MULTIPLA

Per ciascuno dei quesiti da 1 a 7, scegliere una (e solo una) delle cinque possibili risposte ed indicarla nell'apposito foglio. Per ogni quesito saranno attribuiti:

- 0 punti se la risposta è errata (o se viene indicata più di una risposta);
- 1,5 punti in caso di risposta mancante;
- 5 punti in caso di risposta esatta.

(1) Sapendo che $\log_{10}(3) = 0,4771...$, qual è il più piccolo intero positivo k tale che 3^k (nella sua scrittura in base 10) necessita di almeno 100 cifre?
(A) 112. (B) 208. (C) 28. (D) 75. (E) 200.

(2) Due numeri a e b, interi positivi e primi tra loro, sono tali che $9a + 7b$ e $4a + 5b$ sono multipli dello stesso numero primo p. Allora possiamo affermare che:
(A) $p = 13$. (B) $p = 19$. (C) i dati non sono sufficienti per ricavare il valore di p.
(D) $p = 11$. (E) $p = 17$.

(3) Sia ABC un triangolo rettangolo in A, e sia H il piede della perpendicolare da A sul lato BC. Siano P, Q le intersezioni della circonferenza di diametro AH con i lati AB ed AC. Si sa che l'area del quadrato costruito sull'ipotenusa vale 6 volte l'area del triangolo. Quanto vale il rapporto tra l'area del triangolo ABC e quella del quadrilatero $APHQ$?
(A) 4. (B) non è possibile determinarlo (C) 5/2. (D) 3. (E) 9/2.

(4) Nel piano cartesiano Oxy si definiscano i seguenti insiemi:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ |x + 1| + |y| - 1 \leq 0\}, \qquad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 2x^2 + 4x + 2y^2 + 1 \geq 0\}.$$

L'area dell'insieme $C = A \cap B$ è pari a:
(A) $4 - \frac{\pi}{2}$. (B) $2 + \frac{\pi}{2}$. (C) $1 - \frac{\pi}{4}$. (D) $2 - \pi$. (E) $2 - \frac{\pi}{2}$.

(5) Dato un triangolo ABC, sia M il punto medio del segmento BC. Supponendo che $\widehat{AMB} = 60°$ e che $\overline{AM} = \overline{BC}$, si indichi quante delle seguenti affermazioni sono corrette:

- ABC è un triangolo rettangolo
- $\widehat{CAM} = 30°$
- $\overline{CA}/\overline{BA} = \sqrt{7/3}$

(A) 2. (B) non è possibile determinarlo. (C) 0. (D) 1. (E) 3.

(6) Siano A, B due punti nel piano, tali che $\overline{AB} = 6$. Sia poi Γ il luogo di tutti i punti P del piano tali che $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 = 50$. Allora:
(A) Γ è una retta perpendicolare al segmento AB.
(B) Γ è l'insieme vuoto.
(C) Γ è una circonferenza passante per A.
(D) Γ è un'ellisse di fuochi A e B.
(E) Γ è una circonferenza di centro il punto medio di AB.

(7) Linda sta giocando con una biglia sferica di raggio $10mm$. Ha a sua disposizione un binario rettilineo formato da due rotaie di uguale lunghezza, a distanza $12mm$ tra esse. La biglia, rotolando sul binario, compie 300 giri completi su se stessa per percorrere tutta la lunghezza delle rotaie. Quanti giri completi compierebbe la biglia per percorrere tutte le rotaie se Linda mettesse queste ad una distanza di $16mm$?
(A) 300. (B) 500. (C) 200. (D) 225. (E) 400.

QUESITI A RISPOSTA NUMERICA

Per ciascuno dei quesiti da 8 a 10, la risposta consiste in un numero intero. Si richiede di trascrivere nell'apposito foglio esclusivamente tale numero, senza commenti o spiegazioni ulteriori. Saranno attribuiti:

- 0 punti per ogni risposta errata;
- 0 punti per ogni risposta non data;
- 5 punti per ogni risposta esatta.

(8) Un triangolo ha i lati di lunghezza 6, 8 e 10. Calcolare il quadrato della distanza tra il centro del cerchio inscritto ed il centro del cerchio circoscritto.

(9) Determinare quanti sono i numeri interi compresi tra 1 e 100 la cui differenza col proprio cubo è divisibile per 5.

(10) Guglielmo ha partecipato ad una gara di tiro a segno e ha colpito bersagli verdi, rossi e blu. Sa che, a seconda del colore dei bersagli, essi valgono 1, 2 o 3 punti, ma non ricorda il punteggio associato ai vari colori. Considerando tutte le possibili permutazioni dei punteggi dei bersagli, calcola che il punteggio massimo che potrebbe aver fatto è 385, e il punteggio minimo è 355. Quanti bersagli ha colpito in totale?

PROBLEMI

Risolvere i seguenti problemi, **motivando adeguatamente le risposte.**
Una proposizione contenuta nel testo di un problema, della quale sia richiesta la dimostrazione, può comunque essere utilizzata per affrontare le parti successive del problema stesso, anche qualora non sia stata svolta la dimostrazione richiesta.
Per ogni problema verrà assegnato un punteggio da 0 a 20.

(11) Indichiamo con $S_b(n)$ la somma delle cifre dell'intero n nella sua scrittura in base b. Ad esempio, $S_{10}(30) = 3$, $S_7(30) = 6$, $S_5(30) = 2$, $S_3(30) = 2$. Dati b, n ed m numeri interi positivi, con $b > 3$,

(i) calcolare $S_b((b+1)^3)$;

(ii) calcolare $S_b(b^m - 1 - n) + S_b(n)$, per $0 \leq n < b^m$;

(iii) calcolare $S_b(b^m - n)$, per $1 \leq n \leq b$;

(iv) calcolare $S_b(nb^m - n)$, per $0 \leq n < b^m$.

(12) Dimostrare che:

(i) per ogni intero $k \geq 1$ il numero

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots\ldots + \frac{1}{2^k}$$

non è un intero.

(ii) più in generale, per ogni intero $n \geq 2$ il numero

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots\ldots + \frac{1}{n}$$

non è un intero.

(13) Mostrare che:

(i) dato $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ un polinomio di terzo grado che abbia 3 radici reali distinte ξ_1, ξ_2, ξ_3, allora si ha

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = -a$$

(ii) l'equazione $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-2018} = 0$ ha esattamente 3 soluzioni;

(iii) la soluzione del sistema di disequazioni

$$\begin{cases} \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-2018} > 0 \\ 1 < x < 2018 \end{cases}$$

è un'unione di 3 intervalli. Qual è la somma delle loro lunghezze?