

Istruzioni Generali

- Si ricorda che per tutti i problemi occorre indicare sul cartellino delle risposte un numero intero compreso tra 0000 e 9999, o comunque una successione di 4 cifre. Si ricorda anche che occorre sempre e comunque compilare tutte le 4 cifre, eventualmente aggiungendo degli zeri iniziali.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, si indichi la sua parte intera. Si ricorda che la parte intera di un numero reale x è il più grande intero minore od uguale ad x .
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è un numero maggiore di 9999, oppure se non è univocamente determinata, si indichi 9999.
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1,4142 \quad \sqrt{3} = 1,7321 \quad \sqrt{7} = 2,6458 \quad \pi = 3,1416.$$

12 Marzo 2010

Gara a Squadre – Testi dei problemi

1. La passeggiata (punti 20)

Frank porta a passeggio il cane lungo il muro est del penitenziario, perfettamente rettilineo e lungo 9 km. Partono dal portone del penitenziario, proprio all'inizio del muro est, fianco a fianco, e iniziano un gioco: Frank tira la palla, il cane gliela riporta, Frank la ritira immediatamente, e altrettanto istantaneamente il cane riparte dietro alla palla. Per tutta la durata del gioco Frank cammina a 6 km all'ora e il cane a 12 km all'ora. Arrivati alla fine del muro, ritornano continuando a fare il gioco fino al portone. Quanta strada al massimo può far fare Frank al cane tirando opportunamente la palla? Dare la risposta in in hm.

2. La coda (punti 20)

La macchina che stampa i biglietti d'attesa negli uffici comunali a Chicago produce biglietti numerati da 1 a 99; il numero è preceduto da una lettera dell'alfabeto, la quale cambia in ordine alfabetico ogni 99 stampe. Per velocizzare i tempi, si stabilisce che ogni numero chiamato possa portare con sé agli sportelli tante persone quanto è il valore indicato dal suo biglietto. Ad esempio, la persona che ha il biglietto D7 porta con sé D8, D9, D10... fino a D14. Jake ha ritirato il biglietto Q3, ed è appena stato chiamato la persona che ha il biglietto L75. Quante persone andranno assieme a Jake allo sportello, lui compreso?

3. La gara di corsa, I (punti 20)

Alan, Bob, Claire, e Duncan fanno una gara di corsa. Dopo vengono intervistati e ciascuno dice la sua:

Alan: «Bob non è vicino a Duncan (in posizione d'arrivo).»

Bob: «Alan non è ultimo.»

Claire: «Non sono subito dopo Bob (in posizione d'arrivo).»

Duncan: «Né io né Bob abbiamo vinto.»

Tuttavia uno e uno solo tra loro è bugiardo. Elwood sa chi mente e, ascoltando queste frasi, pensa: «So con assoluta certezza l'ordine d'arrivo dei giocatori.» Scrivere chi è il bugiardo e, a seguire, l'ordine dei giocatori sul podio, usando 1 per indicare Alan, 2 per indicare Bob, 3 per indicare Claire e 4 per indicare Duncan.

4. La paga dei musicisti (punti 20)

Murph spiega ai tre Magic Tones come sarà diviso il denaro che spetta loro per la loro performance, come prevede il regolamento del Sindacato Musicisti. Murph spiega: «Metà del denaro sarà diviso tra voi in parti uguali, l'altra metà vi sarà assegnata proporzionalmente alla vostra età in anni.» Sapendo che il musicista più vecchio riceverà, a conti fatti, 40 dollari, e che la sua età è la somma delle età degli altri due, a quanto ammonta in centesimi di dollaro la somma da spartire?

5. I voti (punti 30)

Molto soddisfatta dei risultati dei suoi 11 alunni, la Madre Superiora, direttrice dell'Istituto di St. Helen of the Blessed Shroud, assegna ad ognuno un numero diverso tra 7 e 17 e li mette alla prova con un problema: scrive alla lavagna il numero 360360. Poi spiega: «Questo è il prodotto dei numeri relativi agli alunni che hanno preso 10, tutti gli altri hanno preso 8.» Qual è la somma dei numeri assegnati agli alunni che non hanno preso 10?

6. Il lago nel parco (punti 30)

Un parco comprende un lago di forma quadrata, di cui ogni sponda costituisce la base di un'aiuola a forma di triangolo equilatero. I quattro vertici delle aiuole che non sono sul lago, sono uniti a due a due da recinti rettilinei. Il terreno fra aiuole e recinti è lasciato incolto. L'area del lago è di 9747 metri quadrati, quanti sono i metri quadrati dell'area del terreno incolto?

7. Un gioco d'azzardo, I (punti 30)

Jake e Sline fanno un gioco d'azzardo: si dividono tra loro un mazzo di 4020 carte da pokwer, ciascuna delle quali reca un seme rosso oppure un seme nero. Ciascuno appoggia il suo mazzo di 2010 carte coperto sul tavolo e iniziano a giocare. Scoprono insieme una carta: se i semi delle due carte sono di colore diverso, Sline paga un dollaro ad Jake, se i semi di entrambe sono rossi non succede nulla, se i semi di entrambe sono neri Jake paga 2 dollari a Sline. Per una fortuita coincidenza nel mescolamento, le carte di Jake sono una sequenza di una carta di seme rosso e una di seme nero (cioè rosso, nero, rosso, nero, rosso, . . .) mentre quelle di Sline sono una sequenza di una carta di seme nero seguita da due di seme rosso (cioè nero, rosso, rosso, nero, rosso, rosso, nero, . . .). Sapendo che iniziano il gioco avendo 2010 dollari a testa, quanti dollari ha il vincitore alla fine?

8. La minestra di ceci (punti 30)

Slim è molto scaramantico nel preparare la minestra di ceci. Compra i ceci e poi li divide in due piatti, in modo che ce ne siano esattamente lo stesso numero. Dà quelli che avanzano (e solo quelli) al suo pappagallo Fuzz. Poi divide tutti i ceci che ha tenuto equamente in sei piatti, e come prima quelli che avanzano li mangia Fuzz. A questo punto ripete la stessa operazione con trenta piatti, poi con 210 piatti e quindi con 2310 piatti. Considerando che oggi vuole comprarne in modo che il pappagallo possa mangiarne il maggior numero possibile, ma non spendendo più del necessario, quanti ceci deve comprare?

9. Un gioco d'azzardo, II (punti 40)

Jake e Sline si erano accorti che i due mazzi avevano una strana sequenza dei colori dei semi quando avevano giocato la prima volta. Decidono di fare una rivincita usando esattamente la stessa sequenza, ma smetteranno soltanto quando uno dei due resta con metà soldi (ovviamente, se non ci sono abbastanza carte, riprendono quelle usate mettendole nella esatta sequenza). Come prima, ciascuno inizia con 2010 dollari. Dopo quanti turni finisce la partita?

10. I fagioli **(punti 40)**

Sam e Dave hanno un sacchetto contenente migliaia di fagioli. I due fanno un gioco che consiste nel prendere, a turno, un numero di fagioli compreso tra 1 e 8. Vince chi estrae l'ultimo fagiolo. Sam decide quanti fagioli mettere nel sacchetto e Dave inizia a pescare, da qui in poi pescano alternatamente. Quale sarà la minima quantità di fagioli superiore a 2010 che Sam dovrà scegliere per assicurarsi la vittoria?

11. La festa jazz **(punti 40)**

Matt e Lou organizzano insieme una festa tra jazzisti, noleggiando un locale che costa 8 dollari per ogni persona presente per ogni ora. Arrivano tutti gli invitati, e, dopo aver ballato, bevuto e suonato per 5 ore di seguito, un decimo dei presenti lascia la festa. Allo scoccare dell'ora successiva se ne va un nono delle persone rimaste. Dopo altri 60 minuti un ottavo dei rimanenti abbandona la festa, e così via con questo criterio, finché non se ne va la metà di quelli ancora presenti. A questo punto sono rimasti solo Matt e Lou che restano ancora un'ora a mangiare quel che resta e saldano il conto col locale. Quanti dollari devono pagare?

12. I libri **(punti 40)**

Alan, Bob, Claire e Duncan sono compagni di scuola. Studiano tre materie scientifiche: Scienze, Fisica, Geometria, e cinque materie umanistiche: Latino, Greco, Lettere, Storia, Filosofia. Siccome le cartelle sono troppo pesanti, si accordano per portare ciascuno quattro libri di quattro materie con iniziali diverse, delle quali almeno una scientifica, e in modo tale che in totale abbiano due libri per ogni materia. Si sa inoltre che:

- Alan e Duncan hanno almeno due materie in comune;
- Bob porta Filosofia e Lettere;
- Claire ha tutte le materie scientifiche;
- Alan e Bob hanno in comune solo Greco;

Scrivere, in ordine alfabetico, le materie che porta Duncan, indicando le materie, in ordine alfabetico, con le cifre da 1 a 8.

13. Le stelle di carta, I **(punti 50)**

Il reverendo Cleophus James prepara stelle di carta colorate per decorare la Chiesa di Triple Rock. Per disegnare una stella a 5 punte, segna 5 punti distinti su una circonferenza e li unisce con 5 segmenti senza mai staccare la penna dal foglio. In questo modo può disegnare solo un tipo di stella. Con 7 vertici ne può disegnare invece due tipi differenti, collegando i vertici saltandone di volta in volta uno oppure due, rispettivamente. Quanti tipi differenti di stelle può disegnare se segna 2011 vertici sulla circonferenza?

14. Avvitati e schiatta (punti 50)

Chiusa nel salone di bellezza *Curl up and Dye*, Carrie si concentra calcolando a mente lunghe somme. L'ultima che ha calcolato è la somma di quei numeri interi positivi dispari minori di 100 che si possono scrivere in almeno due modi distinti come differenza di quadrati perfetti. Che numero ha trovato?

15. I poligoni iscritti (punti 50)

In una circonferenza di raggio 1 m si traccia, come primo passo, il diametro. Come secondo passo, si segnano i punti di mezzo di ciascuno dei due archi così formati e si uniscono i vertici del diametro e i due punti di mezzo in modo da ottenere un quadrato. Si continua bisecando ogni arco formato al passo precedente e si uniscono i punti segnati sulla circonferenza in modo da ottenere un poligono regolare. Quanti passi bisogna fare almeno perché il lato del poligono che si ottiene sia più corto di $\frac{1}{2^{2010}}$ m?

16. Un gioco di biglie (punti 50)

Un gioco d'azzardo si gioca con un sacchetto contenente 2010 biglie, 2 rosse, tutte le altre nere. Si vince se, estraendo biglie una dopo l'altra quante se ne vuole, si estraggono tutte le biglie rosse (non importa quante nere). Un giocatore, prima di iniziare la sequenza di estrazioni, deve pagare 1 dollaro per ciascuna estrazione che intende fare. Quanti dollari deve pagare Jake per avere una probabilità superiore al 50% di vincere?

17. La cassaforte della Contea (punti 50)

La combinazione della cassaforte della Contea di Cook è formata da cinque cifre. Steven ricorda che

- La prima cifra è 1;
- Tutti i numeri formati considerando ogni coppia di cifre adiacenti, prese nello stesso ordine con cui compaiono nella combinazione, sono divisibili per 2;
- Tutti i numeri formati considerando ogni terna di cifre adiacenti, prese nello stesso ordine con cui compaiono nella combinazione, sono divisibili per 3;
- Tutti i numeri formati considerando ogni quaterna di cifre adiacenti, prese nello stesso ordine con cui compaiono nella combinazione, sono divisibili per 4^2 ;
- la combinazione, letta come numero di cinque cifre, è divisibile per 5.

Scrivere nell'ordine le ultime quattro cifre della combinazione.

18. La gara di corsa, II **(punti 50)**

Forse Elwood si sbagliava riguardo al bugiardo nella gara di corsa tra Alan, Bob, Claire, e Duncan. Sapendo soltanto che esattamente uno dei quattro è bugiardo, ma che il vincitore non mente, dire:

1. chi sicuramente non ha vinto;
2. chi sicuramente non è arrivato ultimo;
3. chi è subito dopo Bob (in posizione d'arrivo);
4. chi sicuramente non è bugiardo;

Scrivere la risposta a ciascun punto nella casella omonima (cioè la risposta al punto 1. nella prima casella da sinistra, la risposta al punto 2. nella seconda casella da sinistra, e così via), usando 1 per indicare Alan, 2 per indicare Bob, 3 per indicare Claire, 4 per indicare Duncan, e 0 per indicare che la richiesta non ha risposta unica.

19. Il mausoleo **(punti 50)**

Il comandante del gruppo degli Illinois Nazis si è fatto costruire un mausoleo, costruito con blocchi di pietra cubici, di lato 1 m. Formato da 10 gradoni, sembra una ziqqurat: ogni gradone è un parallelepipedo a base quadrata, e tutti i gradoni sono poggiati uno sull'altro. La cima del mausoleo è un gradone di lato 2 m e altezza 2520 m. Ma la principale peculiarità del mausoleo consiste nel fatto che ogni gradone ha il lato del quadrato di base inferiore di 2 metri esatti di quello sottostante e le superfici laterali di ogni gradone sono sempre uguali. Quanti metri è alto il mausoleo?

20. Le stelle di carta, II **(punti 60)**

Aiutando il reverendo James, invece di segnare 2011 punti distinti sulla circonferenza, Jake ne ha segnati 2010. Quanti tipi differenti di stelle può disegnare?

21. I drappelli **(punti 60)**

Per rintracciare i Blues Brothers, il comandante degli Illinois Nazis vuole formare 3 drappelli da un gruppo di 9 volontari. Conoscendo la loro incapacità innata, il comandante designa 3 capitani di drappello tra i 9 volontari: Al, Bruno e Cal. Inoltre, vuole che, in ciascun drappello, ci sia almeno un altro componente, oltre al capitano. Quante terne di drappelli diverse può formare il comandante?

22. Le regole del motel, I**(punti 60)**

All'ingresso del motel, Twiggy ha trovato le regole seguenti

$$0 \star 0 = 1 \quad 0 \star (m + 1) = 0 \quad (n + 1) \star 0 = (n + 1) \times (n \star 0) \\ ((n + 1) \star (m + 1)) = (n + 1) \times [((n + 1) \star m) + (n \star (m + 1))].$$

Capisce che permettono di calcolare il valore della scrittura $n \star m$ per ogni coppia di numeri interi positivi o nulli: Aspettando Elwood, Twiggy calcola quanto vale $\frac{5 \star 5}{1000}$. Che numero trova?

23. Un altro gioco di biglie**(punti 70)**

Un altro gioco d'azzardo si gioca sempre con un sacchetto contenente 2010 biglie, 7 rosse e tutte le altre nere. Le regole prevedono di estrarre le biglie una alla volta fino a che non siano uscite tutte le rosse: a quel punto il gioco è finito. Elwood si chiede mediamente quante estrazioni duri il gioco. Jake non capisce esattamente cosa intenda suo fratello, ma Ray, che la sa lunga, gli spiega che tra i tanti modi di definire il numero medio di estrazioni del gioco (tutti che portano allo stesso risultato) quello più interessante è la somma delle probabilità p_k dove, per ogni numero naturale $0 \leq k \leq 2010$, p_k è la probabilità che, dopo la k -esima estrazione, non siano uscite tutte le 7 biglie rosse. Qual è il numero medio di estrazioni?

24. Le regole del motel, II**(punti 70)**

Elwood non arriva. Per passare il tempo, Twiggy cerca il più piccolo numero n tale che $3 \star n$ sia multiplo di 73. Qual è il numero n ?