

Istruzioni Generali

- Si ricorda che per tutti i problemi occorre indicare sul cartellino delle risposte un numero intero compreso tra 0000 e 9999, o comunque una successione di 4 cifre. Si ricorda anche che occorre sempre e comunque compilare tutte le 4 cifre, eventualmente aggiungendo degli zeri iniziali.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, si indichi la sua parte intera. Si ricorda che la parte intera di un numero reale x è il più grande intero minore od uguale ad x .
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è un numero maggiore di 9999, oppure se non è univocamente determinata, si indichi 9999.
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1,4142$$

$$\sqrt{3} = 1,7321$$

$$\sqrt{5} = 2,2361$$

$$\pi = 3,1416.$$

Siamo fieri di essere in grado di presentare materiale che non si è avuto il coraggio di mandare in onda durante lo **Speciale SCIENZA!** di **MISTERIUS** di ottobre 2013 sulla regina delle scienze.

È nostro dovere avvisare le persone di animo delicato prima che voltino pagina: potrebbero restare scioccate da quel che leggeranno!

Ma, prima di tutto, una domanda a cui noi tutti vorremmo poter dare risposta: se Galileo Galilei ha veramente inventato il telescopio, allora perché ha dato il suo nome a una coppa?

«Cari amici, bentornati a **MISTERIUS!**... **MISTERIUS**, il programma che va dove abita la verità, suona il campanello e poi scappa!»⁽¹⁾

Nella puntata **Speciale SCIENZA!** di ottobre 2013 abbiamo parlato di

Jean-Pierre Bagolot: (1887-2001), matematico dalle infinite sfaccettature, famoso per la scoperta del numero frazzo ζ

Henry Gordon Leveraine: (1934-), astrofisico che raggiunse fama planetaria per le sue teorie sull'universo

Albert Laughton: (1958-), matematico, grande esperto del cosiddetto "problema della Grande Enciclopedia delle Scienze".

⁽¹⁾ Leo Ortolani, *Comics&Science*, pp. 32+iv, Istituto per le Applicazioni del Calcolo "Mauro Picone"–Consiglio Nazionale delle Ricerche, Roma, ottobre 2013.

7 marzo 2014

Gara a Squadre – Testi dei problemi

1. L'inspiegabile caso del turista (punti 20)

A **MISTERIUS** raccontiamo eventi che restano senza spiegazione. Un turista, originario del paese che usa il *ctrome* come unità di misura per le lunghezze e il *loki* come unità di misura per il peso, si reca in un paese dove misurano le lunghezze in *cmotre* e i pesi in *koli*. Il turista sa che 15 *ctrome* corrispondono a 7 *cmotre*, mentre 40 *loki* sono 3 *koli*. Sa anche che 14 cm corrispondono a 3 *ctrome*, mentre 2 kg sono 9 *koli*. Incredibilmente, alla frontiera, il turista dichiara di saper calcolare il peso in *loki* di 20 *cmotre*³ di acqua. Ma che peso calcola il turista in *loki*? [Ricordare che 1 dm³ di acqua pesa 1 kg.]

2. A differenza di Dio, l'uomo gioca a dadi (punti 20)

Noi di **MISTERIUS** facciamo sempre domande che sono fondamentali per l'uomo. Ad esempio: Qual è la probabilità che, tirando un dado a sei facce sei volte, vengano sei risultati diversi?

Dare come risposta la somma di numeratore e denominatore della frazione ottenuta dopo aver semplificato tutti i fattori comuni.

3. Il frazzo \mathfrak{z} (punti 20)

MISTERIUS ha scoperto che l'infinito è di casa in matematica, infatti nei dipartimenti di matematica ci sono spesso così tante persone che si devono usare metodi per induzione per farle uscire tutte. Tentando metodi più raffinati di quelli per induzione per approssimare il numero frazzo \mathfrak{z} , Bagolot considerò la possibilità di ottenere una funzione $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ con le seguenti regole:

- $f(1) = 1$
- se $n = 2m$, allora $f(n) = 4f(m) + 6$
- se $n = m + 2$, allora $f(n) = f(m) + 12(m + 1)$

Quanto vale $f(6)$?

4. Nel *Nachlass* di Bagolot (punti 20)

Dopo la sua morte, tra le carte di Bagolot, è stato trovato un foglio con due righe di numeri: sulla riga superiore sono scritti i numeri interi da 1 a 50; sotto a ciascun numero, sulla riga inferiore, la parte intera della sua radice quadrata. Bagolot aveva valutato la somma dei numeri presenti nella riga superiore e se ne era appuntato il valore che aveva scoperto essere 1275. Invece sui suoi appunti manca la somma dei numeri presenti sulla riga inferiore: è chiaro che voleva calcolarla, ma si è trovato davanti ad un calcolo molto più difficile del previsto. Qual è la somma dei numeri sulla riga inferiore?

5. Il problema del pasticcere (punti 25)

Noi di **MISTERIUS** aiutiamo ad affrontare le domande della vita quotidiana. Ad esempio, prendiamo un pasticcere che sforna una torta quadrata di 50 cm di lato, alta 5 cm e ne vuole ricavare quattro tortine cubiche (di lato 5 cm). Allora, con quattro formine identiche a base quadrata, estrae le quattro tortine dalla torta facendo attenzione a tenere ciascuna formina ben separata dalle altre e lontana dal bordo della torta. Se vuole ricoprire tutta la superficie di quel che rimane della torta (anche la base inferiore) di glassa al cioccolato, noi gli diciamo che superficie deve ricoprire. Ma quanti cm² misura tutta la superficie da ricoprire di glassa?

6. Il riscaldamento di Bagolot (punti 25)

Noi di **MISTERIUS** siamo in grado di descrivervi un esercizio di riscaldamento numerico che Bagolot eseguiva prima di affrontare le sue difficili prove matematiche: elencare su un foglio tutti e soli i numeri n interi positivi minori di 10'000'000 e divisibili per 6 che si scrivono usando soltanto le cifre 0 e 1. Certo scriveva tanti numeri: ma quanti sono?

7. Il piccolo Bagolot (punti 25)

Come Gauss, anche Bagolot dimostrò le sue capacità matematiche fin da bambino. Si racconta che Bagolot, mentre svolgeva un compito in classe sulle frazioni, si accorse che sul suo foglio un esercizio era stato scritto male: si leggeva a malapena

$$1400/1600/7/3/2014$$

ma non si capiva quali fossero le linee di frazione “più importanti”. Bagolot intuì che, ad esempio, $3/2/4$ poteva essere letto come $\frac{3}{2}$, oppure come $\frac{3}{4}$, ottenendo due numeri razionali diversi. Coraggiosamente, Bagolot affrontò senza indugi il problema calcolando tutti i possibili numeri razionali. Determinare il massimo risultato minore di 9999 trovato da Bagolot.

8. Impossibile! (punti 25)

Noi di **MISTERIUS** abbiamo anche il coraggio di presentare problemi impossibili per l'uomo. Ad esempio, qual è il perimetro più grande (misurato in metri) che può avere un triangolo rettangolo con lati che, misurati in metri, hanno lunghezze intere, sapendo che uno di essi misura 25 m?

9. Inimmaginabile! (punti 25)

Noi di **MISTERIUS** abbiamo anche il coraggio di presentare problemi inimmaginabili. Ad esempio, quanti sono gli interi positivi di cinque cifre tali che il prodotto delle loro cifre sia 2000?

10. L'Ultimo Teorema di Bagolot (punti 30)

Il famoso Ultimo Teorema di Bagolot è il seguente: considerato un triangolo rettangolo di cateti 30 e 16 inscritto in una circonferenza di raggio R , e circoscritto ad una circonferenza di raggio r , è impossibile determinare $R + r$. Dimostrare che l'Ultimo Teorema di Bagolot è falso calcolando il valore di $R + r$.

11. La pizza Margherita (punti 30)

Noi di **MISTERIUS** abbiamo scoperto che i matematici sono persone come gli altri: dormono, camminano, mangiano come tutti. **MISTERIUS** è addirittura andato dove “mangiano i matematici”: in una pizzeria vicino al dipartimento. **MISTERIUS** ha scoperto che l'anno scorso la pizza Margherita costava 4€. Quest'anno il prezzo è aumentato di 50 centesimi, ma c'è una novità: ogni volta che si acquista una pizza Margherita, si fa marcare un timbro su una tesserina, e con dieci timbri si ha diritto ad una Margherita “omaggio”!

I cambiamenti stanno sconvolgendo, oltre alla vita dei matematici che mangiano pizza Margherita, anche quella delle ragazze alla cassa: ce ne sono due nuove, Alice e Elena. Alice è un po' sbadata, e anche quando si paga con i dieci timbri invece che con il denaro, segna un timbro su una nuova tesserina. Elena aspetta, per dare una tesserina nuova col primo timbro, che si paghi la successiva Margherita.

Noi di **MISTERIUS** ci chiediamo (e sappiamo che molti tra i telespettatori si chiederanno con noi) se è maggiore la differenza tra il prezzo totale di 2014 pizze pagate sempre ad Elena e 2014 pizze pagate sempre ad Alice, o la differenza tra 2014 pizze pagate sempre ad Alice e 2014 pizze pagate l'anno scorso. Quanto vale la differenza maggiore?

12. Probabilità al bar**(punti 40)**

MISTERIUS è riuscita a recuperare il video della famosa partita a dadi tra Bagolot e Enrico Fermi al bar a Gottinga nel 1923. Come si vede nel video, Bagolot e Fermi hanno tre dadi: uno con 4 facce, numerate da 1 a 4; un altro con 6 facce, numerate da 1 a 6; l'ultimo dado con 8 facce, numerate da 1 a 8. Bagolot sfida Fermi al seguente azzardo: Fermi tira tutti i dadi una volta; a quel punto Bagolot ne getta via uno; Fermi tira i due dadi rimasti una seconda volta. Si sommano tutti i punti ottenuti (con il primo lancio di tre dadi ed il secondo con i due rimasti): se la somma è 15, Fermi vince 100 marchi da Bagolot; altrimenti Bagolot ne vince 10 da Fermi. Si vede che Fermi tira una volta tutti e tre i dadi insieme, ottenendo 8 come somma delle facce. Purtroppo il video termina di colpo; si sa che, a quel punto, avvenne qualcosa di strabiliante: Bagolot valutò perfettamente le sue probabilità di vincere i 10 marchi a seconda del dado che avrebbe gettato. Qual era la sua migliore probabilità di vincere i 10 marchi? [Scrivere come soluzione le prime 4 cifre dopo la virgola del risultato.]

13. Leveraine idrofobo**(punti 40)**

Noi di **MISTERIUS** abbiamo scoperto che i matematici sono stravaganti. Ad esempio, Leveraine aveva una piscina rotonda di diametro 20 m; quando venne colpito da idrofobia, fece ridurre la superficie d'acqua facendo inserire nella piscina un'isola a forma di triangolo equilatero con i tre vertici che toccavano il bordo della piscina. L'idrofobia di Leveraine raggiunse livelli acuti e lui fece sovrapporre alla prima isola un'altra quadrata, sempre con i vertici che toccavano i bordi della piscina e con un lato parallelo ad uno dei lati del triangolo. La superficie d'acqua visibile rimasta non spaventava più Leveraine. Quanti m² misurava l'area dell'acqua visibile?

14. La Congettura di Bagolot**(punti 40)**

Nei suoi approfondimenti sul numero frazionario ζ , Bagolot si convinse che, se ζ esisteva, era una cifra F che verificava la seguente proprietà:

$$0,9\overline{F5} = \frac{n}{810} \text{ per un opportuno numero intero } n.$$

Bagolot dimostrò che, se esiste, tale cifra F è unica, ma a tutt'oggi, non si sa se la proprietà—ormai nota come Congettura di Bagolot—sia verificata da qualche cifra F (e da qualche n). Se si risolve la CB, si risponda scrivendo prima F , seguito delle tre cifre di n .

15. Irrisolubile!**(punti 40)**

Noi di **MISTERIUS** abbiamo scoperto un problema che la matematica non sa risolvere. Questa scatola che vedete inquadrata, a forma di parallelepipedo rettangolo, ha tre facce le cui aree sono, rispettivamente, di 429 m², 364 m² e 231 m². Ma quanto vale il suo volume in m³?

16. La Grande Enciclopedia delle Scienze**(punti 40)**

Nei suoi studi sulla Grande Enciclopedia delle Scienze, Laughton si rese conto che la difficoltà di reperire informazioni all'interno della GES dipendeva anche dalle caratteristiche del numero della pagina da trovare. Per questo introdusse la definizione di numero confuso: un numero intero positivo n si dice *confuso* se esiste un numero intero (positivo) k tale che il numero $n \times k$ è n letto da destra a sinistra. Ma quanti sono i numeri confusi di esattamente 4 cifre?

17. Leveraine a Legdo **(punti 40)**

Noi di **MISTERIUS** abbiamo scoperto che i matematici sono abili trasformisti. Abbiamo le prove che, per fare esperimenti di logica, Leveraine visitò l'isola di Legdo, che era famosa perché ciascun isolano mente sempre oppure dice sempre il vero; per poter far agevolmente domande, vi si recò travestito da ufficiale giudiziario. Leveraine convocò tutti gli isolani sulla piazza. Li numerò, uno a uno, da 1 a 2014; poi impose che ciascuno di loro, seguendo l'ordine numerico che aveva appena assegnato, dicesse qualcosa riguardo a uno degli altri.

Purtroppo il primo parlò a voce così bassa che Leveraine non capì quel che disse; dal secondo in poi, ogni isolano contraddistinto da un numero pari minore di 2014 asserì che quello subito dopo di lui avrebbe mentito, mentre ogni isolano contraddistinto da un numero dispari n disse che l'isolano contraddistinto dal numero $n - 2$ aveva mentito; l'ultimo, contraddistinto dal numero 2014, disse che l'isolano contraddistinto dal numero 2013 mentiva. Ciò nonostante, Leveraine determinò il numero di isolani che mentivano. Noi di **MISTERIUS** chiediamo: ma che numero aveva calcolato?

18. Il passatempo di Bagolot **(punti 50)**

Il passatempo preferito di Bagolot consisteva nel prendere un foglio di carta e tagliarlo in modo da ottenere un rettangolo con un lato lungo $\frac{4}{7}$ dell'altro. Tracciava poi sul rettangolo ottenuto due linee AB e CD parallele al lato lungo (con A e C sullo stesso lato), marcava quattro punti Q_1, Q_2, Q_3 e Q_4 su AB , tre punti R_1, R_2 e R_3 su CD , poi segnava i punti medi M di AC e N di BD . Fatto questo prendeva le forbici e tagliava il foglio lungo la spezzata $MQ_1R_1Q_2R_2Q_3R_3Q_4N$. Terminato di tagliare il foglio, calcolava le due aree ottenute.

Un giorno trovò che aveva tagliato due aree uguali. Incredulo, misurò alcune lunghezze per poter ripetere il passatempo con lo stesso risultato: le misure erano $AB = 14$ cm, $AM = 2$ cm, $AQ_1 = 1$ cm, $AQ_2 = 5$ cm, $AQ_3 = 9$ cm e $AQ_4 = 13$ cm, poi $CR_1 = 3$ cm, $CR_2 = 7$ cm e $CR_3 = 11$ cm. Ma Bagolot dimenticò di misurare la distanza di M dai vertici del lato su cui era segnato e questo gli impedì di ripetere i tagli. I valori di quelle due distanze sono da allora noti come le "distanze di Bagolot". Quanti decimillimetri è lunga la minore delle due distanze di Bagolot?

19. I pesi delle torri **(punti 50)**

Noi di **MISTERIUS** abbiamo scoperto che molti matematici giocano a scacchi, ma lo fanno soltanto per poter usare le scacchiere per i loro scopi. Ad esempio, ricordiamo il concetto di disposizione torrica introdotta da Laughton sulle scacchiere 6×6 . Una *disposizione torrica* consiste delle posizioni di sei torri del gioco degli scacchi sulla scacchiera in modo che non si "mangino" (ricordate che una torre si muove sulla riga o sulla colonna su cui si trova in partenza di quante caselle si vuole). Laughton tentò di associare un peso numerico ad ogni disposizione torrica: presa una scacchiera 6×6 si scrivono in ordine i numeri 0, 1, 2, 0, 1, 2 nella prima riga, nella seconda riga i numeri 1, 2, 0, 1, 2, 0, nella terza riga i numeri 2, 0, 1, 2, 0, 1, nella quarta i numeri 0, 1, 2, 0, 1, 2, nella quinta riga i numeri 1, 2, 0, 1, 2, 0, nella sesta riga i numeri 2, 0, 1, 2, 0, 1 (sarà un caso, ma sulla prima colonna si leggono i numeri 0, 1, 2, 0, 1, 2 nello stesso ordine di quelli sulla prima riga: mah, queste coincidenze fanno pensare che i matematici facciano tutto senza riflettere). Il *peso* della disposizione è il prodotto dei sei numeri che sono coperti dalle sei torri della disposizione torrica. Noi di **MISTERIUS** vogliamo sapere: quanto vale la somma dei pesi di tutte le disposizioni torriche possibili?

20. L'Ipotesi di Bagolot**(punti 50)**

Nei suoi studi aritmetici, Bagolot considerò operazioni numeriche diverse da quelle canoniche. Ad esempio, la famosa Ipotesi di Bagolot riguarda l'operazione di contorno di un numero: Bagolot definì il *contorno additivo* di n come la somma delle cifre di n e il *contorno moltiplicativo* di n come il prodotto delle cifre di n . Introdusse poi il *contorno (generale)* $c(n)$ di n come la somma del contorno additivo di n e del contorno moltiplicativo di n : ad esempio, $c(3) = 6$ e $c(13) = 7$. L'IB è la seguente: per ogni numero intero positivo n minore di 100 il numero 11 compare nella successione

$$n, c(n), c(c(n)), c(c(c(n))), \dots, \overbrace{c(\dots(c(n))\dots)}^{k \text{ volte}}, \dots$$

I colleghi matematici dubitarono della IB perché—dichiararono—ci sono troppi controesempi; ma si sa: i matematici sono sempre invidiosi. Del resto, quanti poi sono i controesempi all'IB?

21. Il primo problema del milionario**(punti 60)**

MISTERIUS ha fatto una scoperta incredibile che non possiamo tenere nascosta! I matematici risolvono problemi per diventare milionari: il Clay Mathematics Institute addirittura offre un milione di dollari per la soluzione di alcuni problemi di nessun interesse. Anche **MISTERIUS** vuole proporre problemi che fanno diventare milionari. Il primo è il seguente: Qualunque numero può essere rappresentato usando una scrittura *elementare*, che utilizza cioè il numero '1', i segni di operazione '+', '×' e le parentesi '(' e ')'. Ad esempio 12 ha una scrittura elementare come $(1 + 1 + 1) \times (1 + 1 + 1 + 1)$, mentre $11 + 1$ non è una scrittura elementare di 12. Quanti numeri '1', come minimo, bisogna utilizzare per ottenere una scrittura elementare di 466?

22. Il secondo problema del milionario**(punti 60)**

Il secondo problema per diventare milionari è il seguente:

Quanto fa la somma dei numeri interi positivi minori di 100 che si possono scrivere in almeno due modi distinti come differenza di quadrati di numeri interi positivi?

23. Il terzo problema del milionario**(punti 70)**

Il terzo problema per diventare milionari è il seguente:

Si considera una scacchiera quadrata di lato 9 dm (ve l'avevamo detto che i matematici giocano a scacchi!). Su uno dei quattro vertici della scacchiera, si trova una formica. La scacchiera è divisa in 81 caselle quadrate, ciascuna di lato 1 dm, per un totale di 100 vertici. Sulla scacchiera si trovano 4 pioli, in corrispondenza di altrettanti vertici (tra i 100 possibili). La formica si muove in linea retta verso il piolo più vicino. Arrivata a questo, si dirige verso il piolo più vicino tra quelli ancora non visitati, sempre in linea retta; nel caso in cui due pioli si trovino alla stessa distanza, sceglie a caso uno dei due pioli. Procedo così fino a giungere all'ultimo piolo. Sapendo che i pioli sono posizionati in modo che sia massimo il percorso che la formica può compiere in questo modo, quanti millimetri è lungo il percorso che essa ha compiuto?

24. Il quarto problema del milionario**(punti 70)**

Il quarto problema per diventare milionari è il seguente:

Si consideri il polinomio $2x^3 - 11x^2 + 4x + 6$ e siano a, b, c le sue radici. Sia poi

$$D_k := (a^2(b+c) + b^2(a+c) + c^2(a+b))^k$$

e sia k_1 il più piccolo valore intero positivo di k tale che la prima cifra da sinistra di D_k sia 7, e k_2 il più piccolo valore intero positivo di k tale che la prima cifra da sinistra di D_k sia 9. Calcolare $k_1 \times k_2$.