



**UNIVERSITA' DEGLI
STUDI DI MODENA E
REGGIO EMILIA**
Dipartimento di Fisica,
Informatica e Matematica



**PIANO LAUREE
SCIENTIFICHE**
Orientamento e
Formazione degli
Insegnanti

4 Dicembre 2013

Gara a squadre di matematica per le scuole medie

Tracce delle soluzioni

Istruzioni

- Le risposte ai problemi sono dei numeri interi compresi tra 0 e 9999.
- Se il risultato di un problema dovesse essere più grande di 9999 scrivere come soluzione 9999.
- Se il risultato è un numero negativo scrivere come soluzione 0000.
- Se il problema è impossibile scrivere 0000.
- Se la soluzione non è un numero intero scrivere come soluzione il numero trovato senza la parte decimale (ad esempio, se la soluzione fosse 3224,75 scrivete 3224).
- Se servissero, usare le seguenti approssimazioni:
 $\sqrt{2} = 1,414$; $\sqrt{3} = 1,732$; $\sqrt{8} = 2,818$; $\pi = 3,142$

Gara a squadre di matematica per le scuole medie

4 Dicembre 2013

1. 20 punti [0080]

Peeta e Katniss sono stati selezionati per partecipare ai Giochi della Memoria.

Da Capitol City, per congratularsi, il Presidente Snow ha inviato sia a Katniss che a Peeta delle rose bianche, in tutto 96 rose. Per sbaglio, però, a Katniss vengono consegnate solo un quinto delle rose che il Presidente desiderava farle giungere, mentre a Peeta viene consegnato un numero di rose pari a cinque volte quello che il Presidente voleva. Tuttavia le rose consegnate sono state lo stesso 96 in tutto. Quante rose sono state consegnate a Peeta?

Rispetto ai desideri del Presidente vengono consegnate quattro quinti delle rose destinate a Katniss in meno e quattro volte le rose destinate a Peeta in più. Siccome le rose totali sono le stesse, questo è possibile solo se le rose originariamente destinate a Peeta fossero state un quinto di quelle destinate a Katniss. Quindi a Peeta erano destinate 16 rose, ma ne riceve 80.

2. 20 punti [0057]

La progettazione dei Giochi della memoria richiede anni di lavoro da parte di esperti che a Capitol City vengono chiamati Strateghi. Non si sa esattamente quanti essi siano, anche se Katniss ne ha recentemente conosciuto uno, Plutarch Heavensbee. Alla televisione Katniss ha sentito dire che:

- gli Strateghi sono più di 57
- gli Strateghi sono meno di 57
- c'è almeno uno Stratega.

Naturalmente anche la televisione di Capitol City dà solo una notizia vera ogni tre. Quanti sono gli Strateghi?

L'unico risultato possibile è 57

3. 20 punti [0038]

Alla Taverna del Forno, Katniss incontra due amici, Alice e Bob, che come lei amano andare a caccia nei boschi. Alice dice: "Oggi ho catturato 18 scoiattoli", Bob dice "Oggi ho catturato il doppio degli scoiattoli di Alice". Katniss dice "Io ho catturato il doppio degli scoiattoli di Bob". Sapendo che esattamente uno di loro mente e che in tutto hanno catturato 92 scoiattoli, quanti sono quelli catturati da Katniss?

Se Katniss mente, allora Alice e Bob dicono entrambi il vero. cioè Alice ha catturato 18 scoiattoli e Bob 36. Questo significa che Katniss ha catturato solo 38 scoiattoli (92-18-36) ed è coerente col fatto che stia mentendo, perché lei dice di averne catturato 72. Se Alice mentisse, il numero totale di scoiattoli catturati dai tre amici (cioè 92) dovrebbe essere divisibile per 7, mentre se a mentire fosse Bob, il numero totale di scoiattoli catturati da lui e da Katniss (cioè 74) dovrebbe essere divisibile per 3.

4. 30 punti [0386]

Katniss, con una calcolatrice, ha cercato di calcolare i tre mezzi del numero degli scoiattoli che ha catturato nel mese scorso, infatti questo è il numero degli scoiattoli che intende catturare in questo mese. Purtroppo, nel fare il calcolo, al posto della cifra 3 ha digitato un'altra cifra. Se la calcolatrice dà come risultato 1351, quanti scoiattoli ha catturato come minimo Katniss il mese scorso?

Se Katniss avesse moltiplicato il numero di partenza (che è intero) per nove mezzi, avrebbe ottenuto come risultato un numero divisibile per 9, ma 1351 non lo è. Se Katniss avesse moltiplicato per otto mezzi, il risultato sarebbe stato un numero pari. Poiché 1351 è divisibile per 7, questo risultato potrebbe invece essere stato ottenuto moltiplicando 386 per sette mezzi.

5. 30 punti [0026]

Il calendario di Capitol City è come il nostro, però gli anni si contano a partire da quello in cui, 50 anni fa, venne domata la rivolta dei Distretti. I Giochi della Memoria, creati per celebrare quella vittoria, inizieranno lo 05-05-50. Partendo dal primo di Gennaio dell'anno 01 e fino alla data di inizio dei Giochi della Memoria quante sono le date che, come questa, si scrivono usando esattamente due cifre, ma nelle quali le cifre sono 0 ed 1?

Per le due cifre che indicano il giorno, se vogliamo usare solo lo 0 e la cifra 1, abbiamo tre possibilità (01, 10 oppure 11). Le stesse tre possibilità le abbiamo per il mese e per l'anno. Quindi in tutto ci sono $3 \times 3 \times 3 = 27$ possibilità per costruire una data nella quale si usino solo la cifra 0 e la cifra 1. Da queste va eliminata la data 11-11-11 che si scrive usando solo una cifra.

6. 30 punti [0175]

La vasca da bagno di Katniss, riempita completamente d'acqua, pesa 400 kg. Poiché il pavimento potrebbe non reggere questo peso, Katniss di solito riempie la vasca solo per un terzo e in questo modo il suo peso totale è di soli 250 kg. Quanti kg pesa la vasca vuota?

La differenza $400 - 250 = 150$ kg ci dà il peso dei due terzi dell'acqua che può stare nella vasca. Quindi la vasca può contenere acqua per un peso di 225 kg al massimo e la vasca vuota pesa $(400 - 225)$ kg.

7. 40 punti [2017]

Katniss è molto preoccupata perché i Giochi della memoria sono estremamente pericolosi. Per allentare la tensione sta facendo a pezzetti un foglio di carta: ha preso un foglio e lo ha strappato in 8 pezzi, poi ha preso uno dei pezzi e lo ha diviso ancora in 8 parti, poi ha preso un altro pezzetto e lo ha strappato ancora in 8... e così via fino a quando sul tavolo non si è formato un mucchietto di più di 2013 pezzetti di carta. Qual è il numero minimo di pezzetti di carta che ci sono alla fine?

Ogni volta che Katniss strappa un foglietto in 8 pezzi, il numero totale dei foglietti aumenta di 7 (al posto di un foglietto lei ne mette 8). Quindi, partendo dal primo foglio, i numeri di foglietti sul tavolo sono 1, poi 8, poi 15, poi 22, 29... Tutti questi numeri si ottengono aggiungendo 1 ad un multiplo di 7. Il primo multiplo di 7 più grande di 2013 è 2016. Se aggiungiamo 1 a 2016 otteniamo il più piccolo numero di pezzetti di carta che potrebbero esserci alla fine.

8. 40 punti [9231]

Qual è il più piccolo numero di quattro cifre distinte che è multiplo di 3, ed è anche tale che la cifra delle centinaia sia doppia di quella delle unità e la cifra delle migliaia sia il triplo di quella delle decine?

Se sommiamo le cifre del numero che cerchiamo dobbiamo ottenere un multiplo di 3. Dal testo si deduce che la somma della cifra delle unità con quella delle centinaia è uguale al triplo della cifra delle unità, quindi è sempre un multiplo di tre. Bisogna, allora, che la somma della cifra delle migliaia con quella delle decine sia anch'essa un multiplo di 3. Ma questa somma vale quattro volte la cifra delle decine, quindi è multipla di 3 solo se la cifra delle decine è un multiplo di 3. L'unica possibilità che abbiamo è che la cifra delle decine sia proprio 3. In questo modo la cifra delle migliaia è 9, mentre la cifra delle centinaia e quella delle unità possono essere scelte in modo da rendere il numero il più piccolo possibile.

9. 40 punti [0037]

Una mattina Katniss ha incontrato Peeta e lo ha salutato. Purtroppo non si è accorta che su un albero lì accanto c'erano due ghiandaie imitatrici. Le ghiandaie imitatrici sono uccelli capaci di ripetere discorsi anche molto complessi, ma queste erano ancora giovani e sapevano ripetere solo la prima parola che sentivano. Così la prima ghiandaia ha detto "Ciao" 6 secondi dopo che Katniss ha salutato Peeta ed ha continuato a ripetere incessantemente la stessa parola ogni 6 secondi. La seconda Ghiandaia ha detto "Ciao" dopo 8 secondi che Katniss ha salutato Peeta, ed ha continuato a ripetere la stessa parola ogni 8 secondi. Nel quarto d'ora in cui Katniss e Peeta sono stati assieme (prima di andarsene con un forte mal di testa), quante volte le ghiandaie hanno detto "Ciao" contemporaneamente?

Le ghiandaie parlano contemporaneamente ogni 24 secondi. Poiché $24 \times 37 = 888$ e $24 \times 38 = 912$, nei 900 secondi in cui Peeta e Katniss stanno assieme le ghiandaie dicono 37 volte "Ciao" nello stesso istante.

10. 40 punti [2592]

Abbiamo un quadrato ABCD, un triangolo equilatero ed un esagono regolare, tutti quanti con i lati lunghi 72 cm. Appoggiamo l'esagono accanto al quadrato in modo che abbia con esso il lato AB in comune ed indichiamo con E il vertice dell'esagono più vicino a B tra quelli che non stanno sul quadrato. Appoggiamo poi il triangolo equilatero accanto al quadrato in modo che abbia con esso i vertici B e C in comune ed indichiamo con F il suo terzo vertice. Quanti cm^2 vale l'area del triangolo EBF?

L'angolo ABE misura 120 gradi, l'angolo ABC ne misura 90 e l'angolo CBF misura 60 gradi. Quindi l'angolo EBF misura $(360 - 120 - 90 - 60) = 90$ gradi. Perciò il triangolo EBF è isoscele e rettangolo e la sua area vale $(72 \times 72) : 2 = 2592$ centimetri quadrati.

11. 40 punti [0032]

Accanto alla casa di Katniss passa la linea ferroviaria ad alta velocità, che è percorsa dai treni che collegano il Distretto 2 a Capitol City. I treni, qualche km più avanti, passano su un ponte lungo 1,5 km, all'inizio del quale si trova una statua equestre del Presidente Snow. Se un treno lungo 100 metri impiega 2 secondi per passare accanto alla statua, quanti secondi impiegherà per attraversare completamente il ponte?

Da quando la testa il treno sale sul ponte a quando la coda esce, la testa del treno deve essere avanzata di 1600 metri. Questo richiede 32 secondi.

12. 50 punti [9240]

Prima dell'inizio dei Giochi, i concorrenti si devono esibire davanti ad una giuria di 77 membri, ciascuno dei quali dà loro un punteggio compreso tra 1 e 200 punti. A Katniss tutti i giudici hanno dato gli stessi punti e il suo punteggio totale è un numero che è prodotto di tre interi consecutivi. Come minimo quanti punti ha ottenuto Katniss in tutto?

Per essere multiplo di 77 il punteggio di Katniss deve essere multiplo di 7 e di 11. Per essere uguale al prodotto di tre numeri consecutivi il punteggio può essere $20 \times 21 \times 22 = 9240$ oppure un numero più grande (ad esempio $21 \times 22 \times 23$, oppure $33 \times 34 \times 35 \dots$).

13. 50 punti [0112]

L'anno scorso, Prim, la sorellina di Katniss, è riuscita a risparmiare 25 centesimi ogni giorno e tutte le sere alle 21 li ha messi nel salvadanaio, prima di andare a dormire. La sera prima del suo compleanno, alle 23, Katniss ha guardato nel salvadanaio e ci ha aggiunto una cifra pari a quella che già c'era. La sera del 31 dicembre, Prim ha messo i soliti 25 centesimi nel salvadanaio e poi lo ha aperto, trovandoci in tutto 174 dollari e 75 centesimi. In che giorno è stato il compleanno di Prim? Tenere presente che anche a Capitol City l'anno scorso non era bisestile e dare la risposta nella forma ggmm.

Se Katniss non fosse intervenuta, l'ultima sera dell'anno Prim avrebbe trovato nel salvadanaio $365 \times 0,25 = 91,25$ dollari.

Quindi Katniss ha aggiunto nel salvadanaio $174,75 - 91,25 = 83,50$ dollari. La differenza tra 91,25 (che è la cifra massima che Katniss avrebbe potuto aggiungere) e 83,50 ci permette di capire quanti giorni prima della fine dell'anno sia intervenuta Katniss. Poiché $91,25 - 83,50 = 7,75 = 31 \times 0,25$, Katniss non ha raddoppiato i 25 centesimi che Prim ha messo nel salvadanaio negli ultimi 31 giorni dell'anno. Questo significa che Katniss ha agito il 30 novembre e Prim ha compiuto gli anni il giorno dopo.

14. 50 punti [0116]

Katniss ha appena ricevuto un libro di circa mille pagine con la storia del Distretto 12, quello da cui lei proviene. Per ordine del Presidente Snow da questo libro sono però state stracciate un certo numero di pagine consecutive che riguardano la rivolta dei Distretti. Così, Katniss si accorge che nel suo libro le pagine rimaste terminano con pagina 568 e riprendono con una pagina numerata con le stesse cifre (cioè 5, 6, 8) ma in ordine differente. Come minimo, quante pagine sono state strappate?

La pagina con cui riprende il libro è numerata con un numero dispari. Quindi come minimo deve essere pagina 685. Mancano quindi almeno $684 - 568 = 116$ pagine.

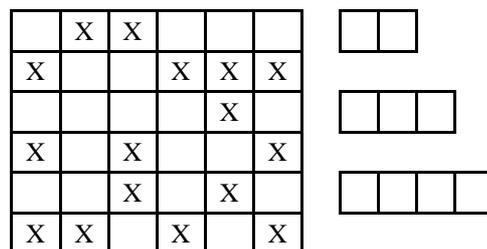
15. 50 punti [0017]

In occasione della cerimonia inaugurale dei Giochi c'è stato un concerto della più famosa band di Capitol City, i Math Direction. I Math Direction sono così famosi che ogni anno decine di ragazzi partecipano ai provini per entrare a farne parte. I quattro attuali componenti hanno deciso che a partire dall'anno prossimo i membri della band aumenteranno ogni anno, ma il loro numero dovrà sempre essere un quadrato perfetto che abbia almeno il 2 o il 7 tra i suoi divisori. L'ultimo giorno dell'anno prima che questo numero superi 1000 la band verrà sciolta. Quanti anni al massimo (compreso questo) potranno durare ancora i Math Direction?

Si tratta di calcolare quanti sono i quadrati perfetti minori di mille che sono pari (ce ne sono quindici, cioè i quadrati di 2, 4, 6, ..., 30) oppure dispari ma multipli di 7 (ce ne sono 2, cioè i quadrati di 7 e di 21)

16. 50 punti [0011]

Plutarch ed un altro Stratega, durante una pausa, stanno giocando a battaglia navale nella super-tecnologica sala di controllo dei Giochi. Plutarch, dopo aver sparato i suoi primi 16 colpi (indicati con una X nella figura) non ha ancora colpito nessuna delle tre navi piazzate dal suo avversario: una composta di 4 quadretti consecutivi, una da 3 e una da 2 (le navi sono rappresentate sulla destra della figura). Il regolamento permette di piazzare le navi sia in verticale che in orizzontale, ma vieta di piazzare due navi in modo che si tocchino su un lato o su un vertice. Quanti colpi deve ancora sparare Plutarch, nel peggiore dei casi possibili, per essere certo di affondare tutte le navi del suo avversario? (Affondare vuol dire colpire tutti i quadretti che compongono una nave.)



Se sapessimo che la nave da due è nei quattro quadratini contrassegnate da una Y nella figura 1, potrebbero essere necessari quattro colpi per affondarla. Inoltre ci vorranno almeno sette tiri per affondare le altre due navi. Quindi serviranno almeno 11 colpi per affondare tutte le navi.

	X	X			
X			X	X	X
			Y	X	
X		X	Y	Y	X
		X	Y	X	
X	X		X		X

Fig. 1

Questi 11 colpi sono anche sufficienti, infatti, se spariamo sulle due caselle in alto a sinistra tra le quattro contrassegnate con la Y nella figura 1, e se vi scriviamo "C" nel caso di nave colpita ed "M" nel caso di nave mancata, si potrebbero verificare le situazioni illustrate nelle quattro seguenti figure:

	X	X			
X			X	X	X
			C	X	
X		X	M		X
		X		X	
X	X		X		X

Fig. 2

	X	X			
X			X	X	X
			M	X	
X		X	M		X
		X		X	
X	X		X		X

Fig. 3

	X	X			
X			X	X	X
			M	X	
X		X	C		X
		X		X	
X	X		X		X

Fig. 4

	X	X			
X			X	X	X
			C	X	
X		X	C		X
		X		X	
X	X		X		X

Fig. 5

Il caso della figura 2 ci dice esattamente come sono messe le navi, quindi con altri otto colpi le affondiamo (totale 10 colpi).

Il caso della figura 4 non si può verificare perché non lascia abbastanza spazio per tutte le navi.

Nella figura 5 la "C" fa parte della nave da due e potrebbero essere necessari altri due colpi per affondarla. Poi con la altre due navi andiamo sul sicuro ed in sette colpi le affondiamo entrambe (in totale sono 11 colpi).

Nella figura 5 ci bastano 4 colpi per affondare la nave da 4, che è in verticale, e al massimo altri quattro colpi per affondare le altre due navi, sparando alle tre caselle in alto a destra e alla casella sotto le due "C". In tutto sono 10 colpi.

17. 50 punti [0720]

Nel palazzo del Presidente Snow c'è un'enorme piscina a forma di rombo, con il lato lungo 78 m e con una diagonale lunga 144 m. Al centro della piscina c'è una statua del Presidente. Tutte le mattine il Presidente percorre a nuoto esattamente 13 volte il percorso che va da un lato della piscina alla statua e ritorno. Quanti metri nuota come minimo ogni mattina?

Le diagonali dividono un rombo in quattro triangoli rettangoli uguali. La distanza minima tra il centro del rombo e un suo lato è uguale alla misura dell'altezza rispetto all'ipotenusa di questi triangoli. Nel nostro caso i triangoli hanno l'ipotenusa lunga 78 cm ed hanno un cateto lungo 72 cm, quindi usando il teorema di Pitagora otteniamo che il quadrato dell'altro cateto misura $78^2 - 72^2 = 6084 - 5184 = 900 = 30^2$.

Quindi i due cateti misurano 72 cm e 30 cm, mentre l'area dei triangoli misura 1080 cm^2 . Da questo si ricava che l'altezza rispetto all'ipotenusa dei triangoli misura $(2 \times 1080) : 78 \text{ cm}$.

Il risultato richiesto dal problema è uguale a 26 volte la misura di questa altezza, cioè $26 \times ((2 \times 1080) : 78) = 720 \text{ cm}$.

18. 50 punti [4950]

Ad est di Capitol City c'è un grande parco in cui fino a poco tempo fa c'erano 9900 alberi, dei quali il 99 per cento erano pini e gli altri erano abeti. In seguito alcuni pini sono stati abbattuti per far posto al Grande Mausoleo del Presidente Snow, così, ora, i pini sono il 98 per cento del totale degli alberi. Quanti pini sono stati abbattuti?

Gli abeti erano (e sono rimasti) 99, cioè l'un per cento di 9900. Dopo il taglio dei pini questi 99 abeti sono diventati il due per cento degli alberi, quindi gli alberi devono essere stati dimezzati. I pini tagliati sono allora la metà di 9900.

19. 60 punti [2013]

La scrittrice Suzanne Collins ha intenzione di scrivere tre nuove serie di libri dedicati alle avventure di Katniss. La prima e la seconda serie conterranno in tutto 26 libri, la prima e la terza serie conterranno in tutto 72 libri, mentre la seconda e la terza serie conterranno in tutto 76 libri. Quanti libri ci saranno in ciascuna delle tre serie? Scrivere come risultato un quinto del prodotto dei tre numeri.

Se la prima e la terza serie conterranno in tutto 72 libri, mentre la seconda e la terza serie ne conterranno in tutto 76 libri, significa che nella seconda serie ci saranno 4 libri in più che nella prima. Quindi la somma dei libri della prima e seconda serie sarà uguale al doppio dei libri della prima serie più 4 e da questo si capisce che i libri della prima serie saranno 11. Quelli della seconda saranno perciò 15 e quelli della terza 61. Il risultato è $(61 \times 11 \times 15) : 5 = 2013$.

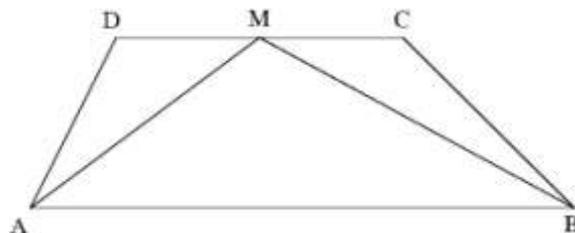
20. 60 punti [0029]

Ai Giochi della Memoria hanno partecipato 43 concorrenti (avrebbero dovuto essere 48, cioè quattro per ognuno dei dodici Distretti, ma diversi distretti ne hanno inviati meno ed alcuni non hanno nemmeno rispettato la richiesta che i maschi fossero tanti quante le femmine). Alla fine della prima giornata, comunque, molti di loro erano già stati eliminati ed i maschi rimasti erano esattamente il 16 per cento della femmine rimaste. Quanti concorrenti erano ancora in gara al termine della prima giornata?

Il 16 per cento di un numero vuol dire 4 venticinquesimi di quel numero. Se i 4 venticinquesimi del numero delle femmine è uguale al numero dei maschi, bisogna che il numero delle femmine sia divisibile per 25. Poiché le femmine sono meno di 43, allora le femmine rimaste devono essere esattamente 25 ed i maschi rimasti devono essere 4.

21. 60 punti [1600]

Un trapezio ABCD, ha la base CD che è tre quinti della base AB. Il punto M è il punto medio del segmento CD. Sapendo che l'area del triangolo ADM è pari a 300 m^2 , quanti m^2 vale l'area dell'intero trapezio?



Il triangolo ADM ha la stessa altezza del triangolo ABM ed ha la base DM che è tre decimi della base AB. Quindi l'area di ADM è tre decimi dell'area di ABM e l'area di ABM vale 1000 metri quadrati. Le aree dei triangoli ADM e MBC sono uguali perché questi due triangoli hanno le basi, DM ed MC, della stessa lunghezza ed hanno anche le altezze della stessa lunghezza. L'area di ABCD è quindi $300+1000+300=1600 \text{ m}^2$.

22. 70 punti [0160]

Quanti numeri di cinque cifre hanno esattamente una cifra uguale a zero e sono tali che, se eliminiamo lo zero, otteniamo un numero palindromo di quattro cifre che ha almeno una cifra pari ed almeno una cifra dispari? (un numero palindromo è un numero che è sempre lo stesso se lo leggiamo da sinistra a destra o da destra a sinistra).

Partiamo contando quanti sono i numeri palindromi di quattro cifre con almeno una cifra pari ed una dispari e che hanno tutte le cifre diverse da zero.

Un numero di questo tipo non può avere le prime due cifre entrambe pari, altrimenti essendo palindromo dovrebbero essere pari anche le altre due cifre. Allo stesso modo le prime due cifre non possono essere entrambe dispari.

Ci sono 20 numeri palindromi che hanno la prima cifra pari e la seconda dispari. Infatti, in questo caso la prima e la quarta cifra potrebbero essere entrambe uguali a 2, 4, 6 oppure 8 (in tutto sono 4 possibilità), mentre la seconda e la terza cifra potrebbero essere 1, 3, 5, 7 oppure 9 (cioè 5 possibili valori in tutto). Analogamente, ci sono 20 numeri palindromi che hanno la prima e la quarta cifra dispari e le altre due cifre pari. Quindi, in tutto i possibili numeri palindromi sono 40.

Per ottenere i numeri di cinque cifre richiesti dal testo dobbiamo inserire una cifra zero. La cifra zero la possiamo inserire in 4 posizioni diverse in ogni numero palindromo (dopo la prima, la seconda, la terza o la quarta cifra), perciò i numeri di cinque cifre che cerchiamo sono $4 \times 40 = 160$.