



**Kangourou  
Italia**



**UNIVERSITA' DEGLI  
STUDI DI MODENA E  
REGGIO EMILIA  
Dipartimento di Fisica,  
Informatica e Matematica**



**PIANO LAUREE  
SCIENTIFICHE  
Orientamento e  
Formazione degli  
Insegnanti**



**6 Aprile 2013**

## **Gara a squadre di matematica per le scuole medie**

### Istruzioni

- Le risposte ai problemi sono dei numeri interi compresi tra 0 e 9999.
- Se il risultato di un problema dovesse essere più grande di 9999 scrivere come soluzione 9999.
- Se il risultato è un numero negativo scrivere come soluzione 0000.
- Se il problema è impossibile scrivere 0000.
- Se la soluzione non è un numero intero scrivere come soluzione il numero trovato senza la parte decimale (ad esempio, se la soluzione fosse 3224,75 scrivete 3224).
- Se servissero, usare le seguenti approssimazioni:

$$\sqrt{2} = 1,414 \quad ; \quad \sqrt{3} = 1,732 \quad ; \quad \sqrt{8} = 2,818 \quad ; \quad \pi = 3,142$$

# Gara a squadre di matematica per le scuole medie

## PLAY - 6 Aprile 2013

### 1. Libri pesanti

[800]

Marchino ha potuto trasferirsi nella camera di suo fratello, che è più grande di quella in cui stava prima, perché suo fratello si è appena laureato e per trovare lavoro si è trasferito a Grenoble.

Ieri Marchino ha messo tutti i suoi libri in uno scatolone per spostarli. Il peso totale dello scatolone coi libri era di 20 kg e, siccome era troppo pesante, Marchino, ha prima tolto dallo scatolone un terzo dei libri e poi ha tolto anche la metà dei rimanenti. Se alla fine lo scatolone pesava 7200 g, qual è il peso in grammi dello scatolone vuoto? I libri di Marchino hanno tutti lo stesso peso.

**Dopo che Marchino ha prima tolto un terzo dei libri, ne sono rimasti due terzi. Se ne toglie la metà ne rimane un terzo. Quindi due terzi dei libri pesano 20 kg – 7200 g = 12800g. Il peso dei libri è allora di 19200 grammi e lo scatolone ne pesa 800.**

### 2. Compleanni primaverili

[17]

Nel 2011 la finale della gara a squadre si tenne a Sassuolo il 19 maggio. Parteciparono 140 concorrenti e la somma delle loro età era di 1750 anni. Oggi, 6 aprile 2013, la somma delle età di quei concorrenti è di 2013 anni. Quanti di loro compiono gli anni tra il 7 aprile ed il 19 maggio?

**Il 19 maggio 2013 la somma delle età sarà di  $1750 + 2 \times 140 = 2030$  anni.**

**Quindi ci sono  $2030 - 2013 = 17$  ragazzi che devono ancora compiere gli anni.**

### 3. Dolci menzogne

[18]

Andrea, Barbara e Carlo hanno in totale 30 caramelle.

Andrea dice: “Io ho 3 caramelle.”

Barbara dice: “Io ho 12 caramelle meno di Carlo.”

Carlo dice: “Io ho la metà delle caramelle di Barbara.”

Esattamente uno di loro sta mentendo. Quante caramelle ha Barbara?

**Barbara e Carlo fanno affermazioni incompatibili, quindi a mentire deve essere uno di loro. Poiché Andrea dice la verità, Carlo e Barbara hanno in tutto 27 caramelle e se Carlo dice il vero, lui ne ha 9 e Barbara ne ha 18. Barbara non dice il vero perché se due numeri hanno differenza pari, hanno anche somma pari.**

### 4. Divisibilità ostinata

[9555]

Qual è il più grande numero di quattro cifre che è divisibile per 15 e tale che scambiando tra loro le sue ultime tre cifre in tutti i modi possibili si ottenga sempre un numero divisibile per 15?

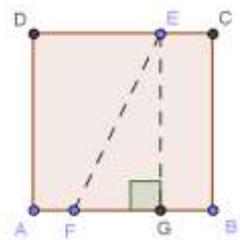
**Per essere divisibile per 15 il numero deve essere divisibile per 5 e per 3. Le sue ultime tre cifre possono essere solo 5 o 0 e la somma delle sue cifre deve essere un multiplo di 3. Il più grande numero con la caratteristica richiesta è 9555**

## 5. Amici distanti

[250]

Marchino ed un suo amico si trovano in due vertici opposti del Padiglione B di PLAY, che è un quadrato di 40 metri di lato. Se cominciano a camminare contemporaneamente lungo due lati paralleli del quadrato con velocità di 2 metri al secondo, dopo quanto tempo la loro distanza in linea d'aria sarà di 50 m? Dare il risultato in centesimi di secondo.

Nella figura, il quadrato ABCD rappresenta il padiglione di PLAY, F è la posizione di Marchino ed E quella del suo amico. Supponiamo che Marchino sia partito dal punto A e l'amico da C. Siccome Marchino e l'amico si muovono con la stessa velocità, si ha  $CE=AF$ . Inoltre GE è lungo 40 metri e così, se EF è lungo 50 m, il teorema di Pitagora ci dice che FG è lungo 30 metri. Allora AF è lungo  $(40-30):2=5$  metri. Marchino impiega due secondi e mezzo per percorrere 5 metri.



## 6. Fattori diversi

[43]

Il numero 22275 può essere scomposto come prodotto di tanti numeri maggiori di 1, più piccoli di 26 e tutti diversi tra loro. Quanto vale la somma di questi numeri?

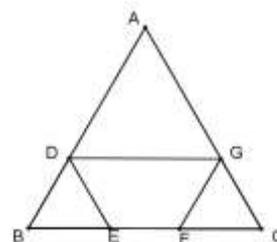
Prima si scompone 2275 in fattori,  $2275=3^4 \times 5^2 \times 11$ , poi si cerca di raggruppare i fattori in modo da ottenere dei numeri tutti diversi. L'unica possibilità è  $2275=3 \times 5 \times 9 \times 11 \times 15$

## 7. Lati paralleli

[22]

Il triangolo ABC nella figura è equilatero ed ha il lato lungo 60 cm. Inoltre i segmenti AB e FG sono paralleli, i segmenti AC e DE sono paralleli ed anche i segmenti BC e DG sono paralleli. Se la misura di  $DE+FG+DG$  vale 79 cm, quanti cm misura EF?

$DE=BD$  e  $DG=DA$ , quindi la misura di  $DE+DG$  vale 60 cm. Allora FG misura  $79-60=19$  cm ed EF misura  $60 - 2 \times 19$  cm.



## 8. Divisori multipli

[8370]

Trovare la differenza tra il più grande e il più piccolo dei numeri ABCD di 4 cifre con queste proprietà:

- ABCD è divisibile per 18.
- ABC è divisibile per 9.
- AB è divisibile per 7.
- A è diverso da zero.

Il più piccolo multiplo possibile di 7 che ha due cifre è 14. Da questo si ottiene 144 che è multiplo di 9. Per verificare la condizione a) dobbiamo aggiungere in coda un numero pari che faccia sì che la somma delle cifre resti multipla di 9. L'unica possibilità è 0. In modo analogo si vede che il numero più grande è 9810.

## 9. Una data speciale

[2034]

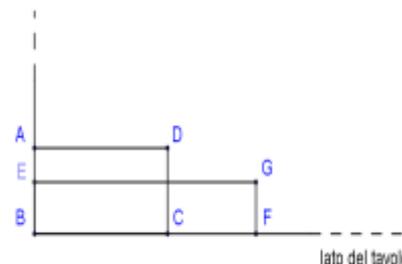
Per scrivere la data di oggi, 06-04-2013, si usano 6 cifre diverse (0, 1, 2, 3, 4, 6). Quale sarà la prima data a partire da oggi che avrà bisogno di sette cifre diverse per essere scritta? Come risposta scrivere il suo anno.

**La prima data per la quale servono 7 cifre è il 16-05-2034**

## 10. Rettangoli sovrapposti

[132]

Marchino, che a scuola sta studiando aree e perimetri, ha ritagliato da un pezzo di cartone tutti i possibili rettangoli che hanno area 60 centimetri quadrati, i lati di lunghezza intera (espressa in cm) e la base più lunga dell'altezza. Poi, per fare spazio, li ha messi uno sull'altro e li ha appoggiati in un angolo del tavolo. In questo modo tutti i rettangoli hanno un vertice in corrispondenza dell'angolo del tavolo e due lati sul bordo del tavolo, con le basi tutte nella stessa direzione come i due rettangoli ABCD ed EBFG in figura. Qual è il perimetro della parte del tavolo che è coperta dai rettangoli?



**Tra i rettangoli di Marchino, quello più alto ha l'altezza di 6 cm e quello con la base più lunga ha la base di 60 cm. Allora, il perimetro della regione alla quale siamo interessati è uguale al perimetro di un rettangolo di base 60 cm ed altezza 6 cm.**

## 11. La somma dei tre numeri

[2013]

La somma di tre numeri consecutivi è multipla sia di 11 che di 61. Quanto vale, almeno, questa somma?

**La somma di tre numeri consecutivi è sempre un multiplo di 3. Perciò il numero che stiamo cercando è un multiplo di 3, di 11 e di 61. Il più piccolo è  $3 \times 11 \times 61 = 2013$**

## 12. Riforme istituzionali

[65]

Quest'anno si eleggerà il nuovo Presidente della Repubblica. Il Presidente si elegge ogni sette anni, ma una proposta di legge di una nuova forza presente in Parlamento prevede che il Presidente si elegga, oltre che negli anni in cui è già previsto, anche in ogni anno che termina per 5. Quindi, partendo da oggi, si dovrebbe eleggere il Presidente nel 2013, nel 2015, poi nel 2020, 2025, ... e così via. Quanti Presidenti si dovrebbero eleggere da oggi al 2293 (compreso)?

**In questo problema si può arrivare al risultato contando con cura quanti sono gli anni nei quali si elegge il presidente. Altrimenti si potrebbe ragionare così:**

**dal 2014 (compreso) al 2293 (compreso) ci sono 280 anni. Se il presidente si eleggesse ogni sette anni, allora, si dovrebbero eleggere 40 presidenti, più quello del 2013, quindi 41 presidenti. I presidenti da eleggere negli anni che finiscono per 5 sono  $280:10=28$ , perché c'è un anno che finisce per 5 ogni dieci anni.**

**Però ci sono degli anni nei quali si verificano entrambe le condizioni, cioè anni che sono uguali a 2013 più un multiplo di sette e che finiscono anche per 5. Di questi anni ce n'è uno ogni settanta (sono il 2055, 2125, 2195, 2265). In questi anni naturalmente si fa una sola elezione.**

**Così i presidenti sono:**

**$41$  (per la regola del 7) +  $28$  (per la regola del 5) -  $4$  (che soddisfano entrambe le regole e quindi sono contati due volte) =  $65$**

### 13. Colori inusuali

[19]

In una scacchiera 8x8, venti caselle scelte a caso sono state colorate di rosso e le altre sono state colorate di bianco. La scacchiera è poi stata tagliata a metà lungo una linea parallela ad uno dei lati e le due metà sono state appoggiate una sull'altra. Se in questo modo si sono formate 7 coppie di caselle rosse sovrapposte, quante sono le coppie di caselle bianche sovrapposte?

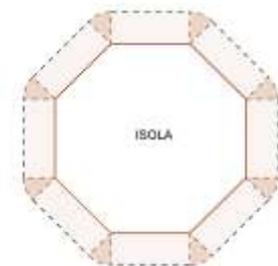
**14 delle 20 caselle rosse fanno parte delle sette coppie di caselle che il testo dice che sono sovrapposte. Rimangono altre 6 caselle rosse che devono essere sovrapposte a 6 caselle bianche. Le altre 38 caselle bianche sono sovrapposte a caselle bianche e formano 19 coppie.**

### 14. Ottagono sicuro

[9256]

Un ricco imprenditore si è fatto costruire in mezzo al Mediterraneo un'isola a forma di ottagono regolare di lato 50 m. Per sorvegliarla ha installato un sistema di sensori che controllano tutta la zona di mare che si trova a meno di 20 m dalle coste dell'isola. Quanti metri quadrati misura la zona di mare controllata?

**Nella figura si vede come è fatta la regione sorvegliata: si tratta di una fascia composta da 8 rettangoli che hanno come basi i lati dell'ottagono ed altezza uguale a 20 m, uniti da settori di cerchio (ogni settore è esattamente un ottavo di cerchio, quindi se li mettiamo assieme otteniamo esattamente un cerchio completo di raggio 20 m).**



**Sommando le aree degli otto rettangoli e quella del cerchio, si ottiene che l'area della fascia vale:**  
 $8 \times (50 \times 20) + 3,1416 \times 20^2 = 9256,64 \text{ m}^2$ .

### 15. Tende e gatti

[120]

Marchino ha montato una tenda per la sua nipotina. All'esterno la tenda ha l'aspetto di un cilindro sul quale è appoggiato un cono (il tetto della tenda) con la base coincidente con la sommità del cilindro. Appena Marchino ha finito di montarla, un gatto è saltato sul tetto e lo ha fatto sprofondare verso l'interno. Così, alla fine, la forma della tenda è diventata quella di un cilindro con dentro un cono che ha la punta rivolta verso il basso e la base coincidente con la sommità del cilindro.

L'altezza del cilindro è di 120 cm e l'area della sua base è di 8 metri quadrati. Dopo il crollo del tetto, il volume della tenda è esattamente la metà di prima. Quanti cm è alto il cono che fa da tetto?

**Indichiamo con B il volume del cilindro che fa da base e con T il volume del cono che fa da tetto. Il testo dice che  $B+V$  è il doppio di  $B-V$ . La differenza di queste due quantità vale  $2V$  e  $B+V$  è il doppio anche di essa. Quindi  $B+V$  è uguale a  $4V$ , cioè  $B=3V$ .**

**Quindi il volume del cilindro è uguale a 3 volte quello del cono e, siccome hanno la stessa area di base, questo succede se cilindro e cono hanno la stessa altezza.**

### 16. Triangoli distinti

[29]

Quanti sono i triangoli distinti che hanno come vertici tre dei 7 punti rappresentati nella figura qui a fianco?

**Nel conteggio bisogna ricordarsi che per costruire un triangolo si devono prendere tre punti in modo che non siano allineati.**



### **17. Il sole nascente**

[70]

Marchino, che ama i film di animazione giapponesi, ha deciso di dipingere un cerchio arancione sulla parete della sua nuova camera. Quando ha finito, si accorge che è un po' piccolo ed allora, continuando a dipingere sempre alla stessa velocità per 42 minuti, lo ingrandisce fino a raddoppiarne il raggio. Se a questo punto Marchino volesse far aumentare di nuovo il raggio del suo cerchio in modo che diventi uguale a tre volte il raggio del cerchio di partenza, per quanti minuti dovrebbe continuare a dipingere?

**Se raddoppiamo il raggio di un cerchio, la sua area si quadruplica e se triplichiamo il raggio, l'area viene moltiplicata per 9. Per il secondo cerchio Marchino deve allora dipingere una regione di area uguale a 3 volte l'area del primo cerchio (perché questo lo ha già dipinto). Quindi per dipingere il cerchio piccolo Marchino ha impiegato  $42:3=14$  minuti. Una volta finito il secondo cerchio, per finire anche quello grande gli rimane da dipingere una regione di area uguale a cinque volte quella del primo cerchio. Ce la fa in  $5 \times 14$  minuti.**

### **18. La calcolatrice**

[56]

Marchino ha trovato la calcolatrice programmabile di suo fratello e sta imparando ad usarla. Il suo primo esperimento è stato di programmare il tasto "A" in modo che moltiplichi per 5 ed aggiunga 1 (quindi, se si digita 30 sulla calcolatrice e si preme "A", il risultato che si ottiene è 151). Se digitassimo 1 e premessimo per 99 volte il tasto "A", quali sarebbero le ultime due cifre del risultato finale?

**Le ultime due cifre dei numeri che si ottengono a partire da 1 sono: 6, 31, 56, 81,, 06, 31, 56, 81, 06... Queste cifre si ripetono ogni 4 posti, quindi nella novantanovesima posizione di questa sequenza troviamo le stesse cifre che ci sono in terza posizione, cioè 56.**

### **19. Media delle medie**

[155]

In una gara di matematica per le scuole medie del dicembre dell'anno scorso l'età media dei concorrenti era di 13 anni, mentre l'età media dei loro accompagnatori era di 44 anni. L'età media di tutti i presenti (concorrenti ed accompagnatori) era di 14 anni e c'erano più di 140 persone. Quanti erano, almeno, i presenti?

**Ogni accompagnatore ha 30 anni in più della media ed ogni ragazzo ha un anno in meno della media. Quindi se prendiamo un accompagnatore e trenta ragazzi possiamo concludere che la loro età media è esattamente di 14 anni. La stessa cosa vale se prendiamo 2 accompagnatori e 60 ragazzi, o 3 accompagnatori e 90 ragazzi. Per superare le 140 persone abbiamo bisogno di 5 accompagnatori e 150 ragazzi.**

## 20. Numeri sul diario

[765]

Marchino ha a disposizione un certo numero di scatole e tante biglie. Lunedì sera prima di andare a dormire mette una biglia in ogni scatola e scrive sul suo diario il numero totale di biglie che ha inserito. Martedì sera fa la stessa cosa, ma inserendo 2 biglie in ogni scatola e scrivendo sul diario il numero totale di biglie che ha inserito quella sera. Mercoledì inserisce altre 5 biglie in ogni scatola e il giovedì termina tutte le sue biglie mettendone esattamente 37 in ogni scatola. Anche in questi due giorni annota sul diario il numero totale di biglie che ha inserito nelle scatole. Venerdì mattina riguarda i quattro numeri che ha scritto sul diario e si accorge che per scriverli ha usato tutte le cifre da 1 a 9 esattamente una volta. Quante sono in tutto le biglie di Marchino?

**Il problema chiede di trovare un numero  $N$  tale che per scrivere i numeri  $N$ ,  $2xN$ ,  $5xN$ ,  $37xN$  si usino tutte le cifre da 1 a 9 una sola volta. Intanto osserviamo che  $N$  non può essere molto grande, altrimenti dovremmo usare più di 9 cifre. Ad esempio, se fosse  $N=20$  si avrebbe  $2xN=40$ ,  $5xN=100$  e  $37xN=740$  e per scrivere i numeri  $N$ ,  $2xN$ ,  $5xN$ ,  $37xN$  servirebbero in tutto 10 cifre. Quindi  $N$  deve essere minore di 20, se vogliamo usare solo 9 cifre. Inoltre tra le cifre che si usano non c'è lo 0, quindi  $N$  deve essere dispari e non può finire con la cifra 5 (se no lo 0 si userebbe). A questo punto si fanno un po' di tentativi e si vede che  $N=17$  va bene. Il risultato è  $17x(1+2+5+37)$**

## 21 L'albergo

[2790]

L'albergo Il Grillo Parlante ha 5 stelle e 5 piani. Al piano terra dell'albergo si trovano la reception e il ristorante, mentre tutte le camere si trovano ai piani superiori. In ogni piano, a partire dal primo, tutte le camere si affacciano su un unico corridoio e possono essere tutte sulla destra, tutte sulla sinistra o disposte su entrambi i lati. Le camere sono numerate con numeri di tre cifre. I numeri delle camere sulla sinistra dei corridoi sono dati dal numero del piano seguito da numeri dispari consecutivi di due cifre a partire da 01, mentre i numeri delle camere sulla destra dei corridoi sono dati dal numero del piano seguito da numeri pari consecutivi a partire da 02. Ad esempio, al quarto piano ci sono quattro camere: la numero 401 sulla sinistra del corridoio e le camere numero 402, 404, 406 sulla destra. Tra primo, secondo e terzo piano ci sono in tutto 24 camere. Inoltre la somma dei numeri delle camere al terzo piano è uguale alla somma dei numeri di tutte le camere che stanno al primo piano e al secondo piano.

Quanto può valere al massimo la somma dei numeri delle camere che stanno al terzo piano?

**Questo problema è molto difficile. Un modo semplice per far sì che la somma dei numeri delle camere al terzo piano sia uguale alla somma dei numeri di tutte le camere che stanno al primo piano e al secondo piano è di disporre 8 camere in ogni piano e di numerarle in questo modo:**

- camere al primo piano: 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108.
- camere al secondo piano: 201, 202, 203, 204, 205, 206, 207, 208.
- camere al terzo piano: 302, 304, 306, 308, 310, 312, 314, 316.

**Per fare aumentare la somma dei numeri del terzo piano potremmo provare a metterci 9 camere, ed effettivamente ci si riesce con questa disposizione:**

- camere al primo piano: 101, 102, 103, 105, 107.
- camere al secondo piano: 201, 202, 203, 204, 205, 206, 207, 208, 210, 212, 214.
- camere al terzo piano: 302, 304, 306, 308, 310, 312, 314, 316, 318.

**Se si mettessero 10 camere al terzo piano, la somma dei loro numeri sarebbe sempre più grande della somma delle altre camere, anche se queste le mettessimo tutte al secondo piano.**