

Soluzioni per la Coppa Fermat 2010



The Band

Martina Rovelli *Lead Vocals*
Daniele Boccalini *Lead Guitar*
Emilio Esposito *Bass Guitar*
Alessandro Rosolini *Keyboards*
Francesco Morandin *Alto Saxophone*
Riccardo Morandin *Trumpet*
Giuseppe Rosolini *Drums and Percussion*

Special Thanks to *Andrea Anfosso, Alessio Carrà
Alessandro Logar, Edi Rosset
Emanuela Sasso, Ernesto De Vito*

Problema 1. (*Daniele Boccalini*)

Soluzione Poco importa di quanto Frank si sforzi a pensare alla strategia migliore, se lui ci mette tre ore a fare il percorso, all'inizio è vicino al cane, alla fine giungono contemporaneamente, per esattamente altrettanto tempo cammina il cane, che percorre quindi 36 chilometri.

Problema 2. (*Alessandro Rosolini*)

Soluzione La chiamata dei numeri è data dalla successione definita per ricorrenza

$$(a(0), b(0)) = (c_0, i_0)$$
$$(a(n+1), b(n+1)) = (a(n) + \lfloor \frac{2a(n)+1}{99} \rfloor, (2a(n)+1) \bmod 99)$$

dove c_0 è la posizione della lettera L nell'alfabeto italiano e $i_0 = 75$. La sequenza si sviluppa come segue

L75 M52 N 6 N13 N27 N55 O12 O25
O51 P 4 P 9 P19 P39 P79 Q60 R22 ...

Problema 3. (*Martina Rovelli*)

Soluzione Se il bugiardo fosse Alan, ho almeno due combinazioni possibili: A-B-D-C-, e A-C-B-D. Se il bugiardo fosse Duncan, ho almeno due combinazioni possibili: B-A-C-D, e B-A-D-C. Se il bugiardo fosse Bob non ho combinazioni possibili: infatti avrei che A è ultimo, e B e D, dovendo essere ad almeno due posti di distanza, si trovano uno al primo e uno al terzo posto, ma questo contraddice l'affermazione di Diana. Il bugiardo è dunque Claire, e vi è un'unica combinazione accettabile: il primo non può essere Claire, perché segue Bob, non può essere Duncan o Bob per l'affermazione di Duncan, dunque è Alan. A questo punto Duncan può essere secondo, seguito da Bob e Claire, o ultimo, preceduto da Bob e Claire. La prima non è accettabile perché contraddice l'affermazione di Alan. Dunque l'ordine di arrivo è: 3123.

Problema 4. (*Martina Rovelli*)

Soluzione Sia $2n$ la cifra totale da spartire. Il musicista più anziano riceve $\frac{n}{3} + \frac{n}{2}$ perché la somma delle età dei tre corrisponde a due volte l'età del più vecchio. Da $\frac{n}{3} + \frac{n}{2} = 4000$ ricavo $n = 4800$, e dunque il denaro da spartire è di $2n = 2 \times 4800 = 9600$ dollari.

Problema 5. (*Martina Rovelli*)

Soluzione La fattorizzazione di 360360 è $2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13$. Dunque tra gli addendi cercati compaiono certamente 11 e 13 e non ci sono il 16 e il 17. Se comparisse il 7, e non il 14, dovrei ancora sistemare $2^3 \times 3^2 \times 5$. Il 5 può comparire nel 10 o nel 15, ma in entrambi i casi avanza un numero inadeguato: $2^2 \times 3^2 = 36$ oppure $2^3 \times 3 = 24$. Allora compare il 14. Rimane ora $2^2 \times 3^2 \times 5$: non può esserci il 10 perché avanzerebbe $2 \times 3^2 = 18$, quindi compare il 15. Avanza $2^2 \times 3 = 12$. Quindi gli addendi cercati sono i numeri da 7 a 16 esclusi 11, 12, 13, 14, 15. il numero richiesto è dunque: $7 + 8 + 9 + 10 + 16 + 17 = 67$.

Problema 6. (*Alessandro Rosolini*)

Soluzione Sia k il lato del lago. La figura formata dai recinti è un quadrato. L'altezza di ciascun triangolo equilatero è $\frac{\sqrt{3}}{2}k$ e la diagonale del quadrato formato dai recinti è $k(1+\sqrt{3})$. Dunque l'area del recinto totale è $k^2 \frac{(1+\sqrt{3})^2}{2} = k^2(2+\sqrt{3})$ metri quadrati, quella del lago k^2 metri quadrati, quella dei 4 triangoli $4k^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = k^2\sqrt{3}$ metri quadrati, si ha che l'area dei terreni incolti è $k^2\text{m}^2$.

Problema 7. (*Alessandro Rosolini*)

Soluzione La partita si svolge nel modo seguente:

turno	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	...
Jake	r	n	r	n	r	n	r	n	r	n	r	n	r	n	r	...
Sline	n	r	r	n	r	r	n	r	r	n	r	r	n	r	r	...

Sia $k = 2010$. Ogni 6 round, dopo i primi 4, Jake guadagna un dollaro (e quindi Sline ne perde uno): quindi vince Jake, e dopo $4 < n$ turni i dollari che ha si calcolano come

$$\begin{aligned} k + \left\lfloor \frac{n-4}{6} \right\rfloor & \quad \text{se } n = 4, 5 \pmod{6} \\ k + \left\lfloor \frac{n-4}{6} \right\rfloor + 1 & \quad \text{se } n = 0 \pmod{6} \\ k + \left\lfloor \frac{n-4}{6} \right\rfloor + 2 & \quad \text{se } n = 1 \pmod{6} \\ k + \left\lfloor \frac{n-4}{6} \right\rfloor + 3 & \quad \text{se } n = 2, 3 \pmod{6} \end{aligned}$$

Problema 8. (*Daniele Boccalini*)

Soluzione Dato che $2310 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11$, la somma dei resti coincide con il resto che si ottiene dividendo subito in 2310 piatti poiché, se $q_0 = q_1p_1 + r_1$ con $0 \leq r_1 < p_1$, dalla divisione

$$q_1 = q_2p_2 + r_2 \quad 0 \leq r_2 < p_2$$

si ottiene anche la divisione $q_1p_1 = q_2p_1p_2 + p_1r_2$ dato che $0 \leq p_1r_2 < p_1p_2$. Il massimo resto è 2309.

Problema 9. (*Alessandro Rosolini*)

Soluzione Smettono appena Jake vince $\frac{2010}{2} = 1005$ dollari. Visto come si sviluppa la sequenza di vincite, si deve trovare il primo numero n tale che la sua divisione per 6 abbia resto 5 e il quoziente per 6 di $n - 4$ sia 1002, cioè $n - 4 = 1002 \times 6 + 1$. Così $n = 6017$, a quel punto Jake vince 1002 dollari; la partita finisce tre turni dopo.

Problema 10. (*Emilio Esposito*)

Soluzione Un giocatore può sempre attuare la strategia di togliere la differenza da 9 dell'estrazione dell'altro giocatore, in modo che dopo due estrazioni vengano tolti esattamente 9 fagioli. Il giocatore tra i due che, attuando questa strategia, fa in modo che restino nel sacchetto un numero di fagioli multiplo di 9, vince. Perciò, il solo modo che il primo ha per vincere, è quello di mettere nel sacchetto un numero di fagioli multiplo di 9. Per ogni altro numero di fagioli, il secondo giocatore si assicura la vittoria.

Problema 11. (*Martina Rovelli*)

Soluzione Sia n il numero dei presenti alla festa; dopo 5 ore ne sono rimasti $n(1 - \frac{1}{10}) = n \frac{9}{10}$; un'ora dopo $n \frac{9}{10}(1 - \frac{1}{9}) = n \frac{9}{10} \frac{8}{9} = n \frac{8}{10}$. Ad ogni ora il numero dei rimasti diminuisce di $\frac{n}{10}$, finché il numero diventa 2. Da $\frac{n}{10} = 2$ si trova $n = 20$, gli ultimi se ne vanno dopo 14 ore. Il prezzo è $8 \times 2 \times (5 \times 10 + 9 + 8 + \dots + 1) = 8 \times 2 \times (50 + 45) = 1520$.

Problema 12. (*Martina Rovelli*)

Soluzione Poiché Alan e Bob hanno in comune solo Greco, e Bob porta Filosofia e Lettere, segue che Alan porta Fisica e Latino. Siccome Bob deve portare almeno una materia scientifica, Bob porta Scienze e Alan Storia. Siccome Claire porta Scienze e Fisica, Duncan porta Filosofia e Storia; inoltre gli spetta anche un libro di Geometria, perché quelli di Greco sono esauriti da Alan e Bob. Infine si sa che Duncan ha già in comune con Alan Storia, e non Geometria e Filosofia, quindi deve portare la stessa materia con la L, cioè Latino. In conclusione Duncan porta Filosofia, Storia, Geometria e Latino.

Problema 13. (*Emilio Esposito*)

Soluzione Per un numero primo di vertici, collegando un vertice con un altro $k < p$ vertici più avanti (cioè $k > 0$), si collegano tutti dato che $\text{mcd}(k, p) = 1$. Per disegnare una stella, non posso usare $k = 1$. Inoltre per $k' = p - k$ si ottiene lo stesso poligono che si ottiene con k . Perciò le stelle diverse sono $\frac{(p-1)-2}{2} = \frac{p-3}{2}$.

Problema 14. (*Daniele Boccalini*)

Soluzione Un numero x che si scrive come la differenza dei due quadrati $a^2 - b^2$ si scompone nei due fattori $x = (a+b)(a-b)$. Dato che ogni numero dispari $x = 2k+1$ si scrive certamente come differenza $(k+1)^2 - k^2$, per scriverlo in almeno un altro modo deve essere scomponibile in due fattori (dispari) diversi da 1 e diversi tra loro: è un numero dispari che non è primo e neppure quadrato di un numero primo. Si devono sommare tutti quelli inferiori a 100. Sono

15	21	27	33	35	39	45	51	55	57	63
65	69	75	77	81	85	87	91	93	95	99

La somma è 1358.

Problema 15. (*Daniele Boccalini*)

Soluzione All' n -esimo passo si ottiene un poligono di 2^n lati. Sia k_n la lunghezza del lato all' n -esimo passo. La formula generale per k_n non serve, si deve solo trovare il primo n tale che $k_n \leq 2^{-q}$ per $q = 2010$. Partendo dal quadrato e considerando la circonferenza, vale: $2^2 = 4 < 4\sqrt{2} < k_n 2^n < 2\pi < 8 = 2^3$. Perciò, qualunque sia n , si ha che $\frac{1}{2^{n-2}} < k_n < \frac{1}{2^{n-3}}$. Allora il minimo n è $q + 3$.

Problema 16. (*Giuseppe Rosolini*)

Soluzione Sia n il numero totale di biglie, siano a le biglie rosse. Dopo k estrazioni successive, le raccolte di biglie possibili sono $\binom{n}{k}$, mentre le raccolte favorevoli (quelle che includono le a biglie rosse) sono $\binom{n-a}{k-a}$. Le probabilità che esca entro l'estrazione k sono $\binom{n}{k}^{-1} \binom{n-a}{k-a} = \frac{(n-a)!k!(n-k)!}{n!(k-a)!(n-a-(k-a))!} = \frac{(n-a)!k!}{n!(k-a)!}$. Per $a = 2$ la soluzione è il più piccolo k tale che $\frac{k(k-1)}{n(n-1)} > \frac{1}{2}$. Risolvendo l'equazione $x(x-1) = \frac{n(n-1)}{2}$ si trova che $k > \frac{1}{2} + \sqrt{n^2 + (n-1)^2}$, cioè $k > \frac{1}{2}(1 + \sqrt{2010^2 + 2009^2}) \approx 1421.4$.

Problema 17. (*Martina Rovelli*)

Soluzione Siano $abcd$ le cifre da inserire in ordine. Dalla seconda segue che tutte le cifre richieste sono pari, e $d = 0$ per la quarta. Dalla terza, $a + b + 1$, $a + b + c$ e $b + c$ sono multipli di 3, dunque a è un multiplo di 3, così come $c - 1$ e $b + 1$, cioè $a = 0, 6$, $b = 2, 8$ e $c = 4$. Il numero è allora uno tra 10240, 10840, 16240, 16840. Ma 1084, 1624 e 1684 non sono divisibili per 16. Dunque il numero è 10240.

Problema 18. (*Martina Rovelli*)

Soluzione Considerando le quattro affermazioni, e supponendo che una e una sola tra esse sia falsa, si ottiene che:

- se il bugiardo fosse A i casi possibili sono: ABDC, ACBD, ACDB, CABD, CADB;
- Se il bugiardo fosse B non ho casi possibili;
- se il bugiardo fosse C l'unico caso possibile è ABCD;
- se il bugiardo fosse D i casi possibili sono BACD, BADC, DACB, DCAB;

Escludendo che il vincitore sia bugiardo, le combinazioni che rimangono valide sono: CABD, CADB, ABCD, BACD, BADC. D è l'unico a non comparire al primo posto e A è l'unico a non comparire all'ultimo posto. B è l'unico sicuramente sincero. Non si può dire chi sia dopo B. Dunque la risposta (dopo opportune codifiche), è 4102

Problema 19. (*Alessandro Rosolini*)

Soluzione Sia n il numero dei gradoni, sia k e x_0 il lato e l'altezza del gradone in cima alla piramide. La superficie laterale di ogni gradone è 4 volte l'area del rettangolo avente come

base il lato del quadrato base del gradone e come altezza l'altezza del gradone. Quindi la proporzione tra le superfici laterali è la stessa tra le aree dei rettangoli. Partendo dall'ultimo gradone, si ha che il lato di base di quello sottostante è uguale a $k + 2$; l'altezza x_1 si ricava dall'uguaglianza $x_0 k = x_1 (k + 2)$, cioè $x_1 = x_0 \frac{k}{k+2}$. Proseguendo per ricorsione, si ha che l'altezza x_i dell' $i - 1$ -esimo è $x_i = x_0 \frac{k}{k+2i}$. Quindi l'altezza totale della ziqqurat è uguale alla somma delle n altezze

$$\begin{aligned} h &= x_0 + x_1 + \dots + x_n \\ &= x_0 + x_0 \frac{k}{k+2} + \dots + x_0 \frac{k}{k+2n} \\ &= x_0 k \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+2} + \dots + \frac{1}{k+2n-2} \right) \end{aligned}$$

Problema 20. (*Emilio Esposito*)

Soluzione Nel caso che p non sia primo, devo contare i numeri $1 < k < [p/2]$ e tali che $\text{mcd}(p, k) = 1$, cioè $\frac{\phi(2010)}{2} - 1 = \frac{1 \times 2 \times 4 \times 66}{2} - 1 = 263$ dato che la scomposizione di 2010 in fattori primi è $2 \times 3 \times 5 \times 67$. Si possono anche contare direttamente: indicando con A_n i multipli di n compresi tra 1 e 1005, si ha che

gli elementi di	sono	gli elementi di	sono	gli elementi di	sono
A_2	502	$A_2 \cap A_3 = A_6$	167	$A_2 \cap A_3 \cap A_5 = A_{30}$	33
A_3	335	$A_2 \cap A_5 = A_{10}$	100	$A_2 \cap A_3 \cap A_{67} = A_{402}$	2
A_5	201	$A_3 \cap A_5 = A_{15}$	67	$A_2 \cap A_5 \cap A_{67} = A_{670}$	1
A_{67}	15	$A_2 \cap A_{67} = A_{134}$	7	$A_3 \cap A_5 \cap A_{67} = A_{1005}$	1
		$A_3 \cap A_{67} = A_{201}$	5		
		$A_5 \cap A_{67} = A_{335}$	3		

e i numeri $1 \leq k \leq [p/2]$ e tali che $\text{mcd}(p, k) = 1$ sono

$$A_1 \setminus (A_2 \cup A_3 \cup A_5 \cup A_{67})$$

che sono $1005 - (502 + 335 + 201 + 15) + (167 + 100 + 67 + 7 + 5 + 3) - (33 + 2 + 1 + 1) = 264$. Bisogna sottrarre 1 per escludere 1.

Problema 21. (*Giuseppe Rosolini*)

Soluzione Sono le suriezioni da un insieme di $m - n$ elementi ad un insieme di n elementi (vedi esercizio successivo: $n \star (m - 2n)$) che si contano con i numeri di Stirling del II tipo:

$$\sum_{k=0}^{m-n} (-1)^k \binom{n}{k} (n - k)^{m-n}.$$

Nel caso in questione, si possono anche contare le funzioni dall'insieme dei sei soldati all'insieme $\{A, B, C\}$ che non sono suriezioni: sono tutte le funzioni che hanno immagine in un insieme di due elementi. Ci sono 3 sottoinsiemi di tre elementi, per ciascuno di questi le funzioni sono 2^6 . In questo modo si contano due volte le funzioni costanti. In totale le funzioni che non sono suriettive dall'insieme dei soldati all'insieme $\{A, B, C\}$ sono $3 \times 2^6 - 3$. La risposta è $3^6 - (3 \times 2^6 - 3) = 540$.

Problema 22. (*Giuseppe Rosolini, Francesco Morandin*)

Soluzione Il valore $a \star (b - a)$ è il numero di suriezioni da un insieme di b elementi ad un insieme di a elementi. Infatti, da un insieme di 0 elementi c'è esattamente una funzione verso un altro insieme: quest'unica è suriettiva se e solo se l'altro insieme ha pure 0 elementi. Ogni suriezione da un insieme X con $(b + 1) + c$ elementi a un insieme Y con $b + 1$ elementi è totalmente determinata dal suo valore in Y su un fissato argomento \bar{x} di X , insieme con una funzione da $f : X \setminus \{\bar{x}\} \rightarrow Y$. I casi possibili sono due: f è suriettiva su Y oppure no. Nel secondo caso le coppie che determinano completamente la suriezione data sono il prodotto del numero di sottoinsiemi di Y con b elementi e del numero di suriezioni da un insieme con $b + c$ elementi ad uno con b elementi, cioè $\binom{b+1}{b} (b \star c) = (b + 1)(b \star c)$. Il primo caso si presenta soltanto se $c \neq 0$ e, se questo avviene, le coppie di questo tipo che determinano completamente la suriezione data sono il prodotto del numero di elementi di Y e del numero di suriezioni da un insieme con $b + c$ elementi ad uno con $b + 1$ elementi, cioè $(b + 1) \times [(b + 1) \star (c - 1)]$.

Problema 23. (*Giuseppe Rosolini, Francesco Morandin*)

Soluzione Sia n il numero totale di biglie, siano a le biglie rosse. Dopo k estrazioni successive, $p_k = 1 - \frac{\binom{n-a}{k-a}}{\binom{n}{k}} = 1 - \frac{\binom{k}{a}}{\binom{n}{a}}$ dato che $\binom{n-a}{k-a} \binom{n}{a} = \binom{n}{k} \binom{k}{a}$. La somma che definisce il tempo medio di completamento è

$$\sum_{k=0}^n p_k = (n+1) - \frac{\sum_{k=0}^n \binom{k}{a}}{\binom{n}{a}}.$$

Dato che $\sum_{k=0}^n \binom{k}{a} = \binom{n+1}{a+1}$,

$$\sum_{k=0}^n p_k = (n+1) - \frac{\binom{n+1}{a+1}}{\binom{n}{a}} = (n+1) - \frac{n+1}{a+1} = (n+1) \frac{a}{a+1} \approx 1759.62$$

Problema 24. (*Giuseppe Rosolini, Riccardo Morandin*)

Soluzione Il valore $a \star (b-a)$ è il numero di suriezioni da un insieme di b elementi ad un insieme di a elementi. Perciò, per calcolare $3 \star n$ si devono contare le suriezioni da un insieme di $n+3$ elementi, diciamo A , a un insieme di 3 elementi: sono tutte le funzioni da A a quello di 3 elementi, diciamo $\{F, I, V\}$, escluse le suriezioni da A a uno di 2 elementi e le suriezioni dall'insieme $n+3$ elementi a uno di 1 elemento (in entrambi i casi, contate tre volte perché i sottoinsiemi di due elementi di $\{F, I, V\}$ sono tre così come i suoi sottoinsiemi di un elemento). Una suriezione da A a un insieme di 2 elementi, diciamo l'insieme $\{F, V\}$, è precisamente un sottoinsieme non-vuoto e non-totale di A . Perciò sono $2^{n+3} - 2$. Dunque $3 \star n = 3^{n+3} - 3 \times (2^{n+3} - 2) - 3 \times 1 = 3^{n+3} - 3 \times 2^{n+3} + 3$. Dato che 73 è primo, basta trovare il più piccolo n tale che $73 | (3^{n+2} - 2^{n+3} + 1)$. I possibili resti delle divisioni delle potenze di 3 con 73 sono 12 e si presentano in sequenza:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3^{n+2}	9	27	8	24	72	70	64	46	65	49	1	3	9

Quelli delle divisioni di 2 con 73 sono 9 e si presentano in sequenza:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2^{n+3}	8	16	32	64	55	37	1	2	4	8

I resti di una potenza di 2 e di una potenza di 3 la cui differenza è 1 sono $(2, 1)$ e $(4, 3)$. La prima coppia che si può presentare è $(2, 1)$ e avviene per $n = 10 + 12k = 7 + 9h$. Risolvendo $9h - 12k = 3$ si trova $k = 2$, $h = 3$ e $n = 34$.