



Istruzioni Generali

- Si ricorda che per tutti i problemi occorre indicare sul cartellino delle risposte un numero intero compreso tra 0000 e 9999, o comunque una successione di 4 cifre. Si ricorda anche che occorre sempre e comunque compilare tutte le 4 cifre, eventualmente aggiungendo degli zeri iniziali.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, si indichi la sua parte intera. Si ricorda che la parte intera di un numero reale x è il più grande intero minore od uguale ad x .
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è un numero maggiore di 9999, oppure se non è univocamente determinata, si indichi 9999.
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:
 $\sqrt{2} = 1,4142$ $\sqrt{3} = 1,7321$ $\sqrt{5} = 2,2361$ $\pi = 3,1416$.

**E ORA
PER QUALCOSA DI
COMPLETAMENTE
DIVERSO...**

6 marzo 2015

Gara a Squadre – Testi dei problemi

1. *L'inquisizione spagnola* (punti 20)

Aula di scuola elementare.

Maestra Mi hai stufato, Macchele. Adesso, per punizione, scrivi 75 volte il tuo nome e cognome in maiuscolo sul foglio.

Anna (*bisbigliando*) Questa è roba da inquisizione spagnola. (*Scrivi in fretta, stacca la penna dal foglio il minor numero di volte possibile, non riscrive mai uno stesso tratto rettilineo. Produce orgogliosa il foglio con scritto ANNA MACCHELE—tutte lettere maiuscole, staccate una dall'altra—tante volte quante richieste dalla maestra.*)

Maestra (*arrabbiata*) Visto che hai fatto così in fretta, conta quante volte hai staccato la penna dal foglio da quando hai iniziato a scrivere a quando hai finito.

Voce fuori campo CHE COSA RISPONDE ANNA?

2. *Ufficio Cambi* (punti 20)

Ufficio Cambi prima dell'apertura al pubblico. John sta preparando i cambi tra tutte le seguenti valute: ARS, AUD, BRL, CAD, CHF, CNY, CZK, DKK, EGP, EUR, GBP, HKD, HUF, IDR, ILS, INR, JPY, MXN, NOK, NZD, PHP, PLN, RUB, SAR, SEK, SGD, TRY, USD, ZAR. Ha preparato una tabella quadrata per inserire tutti i cambi; in cima a ogni colonna e a fianco di ogni riga c'è la denominazione di una valuta. Ha già scritto 1 in tutte le caselle sulla diagonale principale per il cambio di una valuta con se stessa.

Eric (*guardando le caselle della tabella*) Sei a buon punto. Adesso ti mancano solo altri cinque cambi.

John (*guardando Eric stupito*) Stupidaggini! Il numero minimo necessario per poter completare la tabella è ben più grande.

Voce fuori campo QUAL È IL NUMERO MINIMO A CUI SI RIFERISCE JOHN?

3. *L'origine delle specie (versione logica)* (punti 25)

Su un'isola due biologi con il camice si dirigono verso una fila di 2015 pappagalli.

Darwin Su quest'isola ci sono solo due specie di pappagalli: i pappagalli normali e i pappagalli intelligenti. Un pappagallo normale ripete sempre, esattamente l'ultima frase detta; un pappagallo intelligente dice sempre la verità.

Boole Questi pappagalli in fila sono normali o intelligenti?

Darwin Non lo so. Proviamo a chiederglielo. (*Rivolto ai pappagalli*) Lui (*Indicando Boole*) vuole fare la stessa domanda a ciascuno di voi.

Boole (*rivolto ai pappagalli*) Quanti dei pappagalli al tuo fianco sono normali?

Primo pappagallo della fila Esattamente uno dei pappagalli al mio fianco è normale.

Secondo pappagallo della fila Esattamente uno dei pappagalli al mio fianco è normale.

⋮

Duemilaquindicesimo pappagallo della fila Esattamente uno dei pappagalli al mio fianco è normale.

Darwin Ogni pappagallo ha detto che esattamente uno dei pappagalli al suo fianco è normale: sono metà intelligenti e metà normali.

Boole Non è possibile! In totale sono un numero dispari! Ti sbagli, non sappiamo esattamente quanti sono quelli intelligenti. Però ho calcolato il massimo numero possibile di pappagalli intelligenti ed anche il minimo numero possibile.

Voce fuori campo QUANTO VALE LA DIFFERENZA TRA IL PIÙ GRANDE E IL PIÙ PICCOLO DEI DUE NUMERI CHE BOOLE HA CALCOLATO?

4. Dr. House (versione numerica)

(punti 25)

Studio di parapsicologia, due persone in camice, una è bendata, l'altra fa sedere un terzo uomo davanti a un tavolo in mezzo alla stanza.

Dr. Gregory (all'uomo seduto) Adesso lei scriverà un numero di tre cifre diverse, usando soltanto le cifre 0, 1, 2 e 3. Ma deve essere scritto in modo che le cifre appaiano in ordine decrescente!

Dr. James (bendato, parla all'uomo seduto) Stia calmo, non vogliamo farle del male.

Dr. Gregory (batte violentemente un bastone sul tavolo) NO! 123 NON VA BENE! Le cifre devono essere in ordine decrescente!

L'uomo seduto cancella 123 e scrive un altro numero.

Dr. Gregory Bene! Ora lo riscriva a fianco.

Dr. James (all'uomo seduto) Lei ha adesso davanti un numero di sei cifre. Lo divida per l'anno in corso, 2015. Che resto viene?

Uomo seduto Viene resto 0.

Dr. James (sudando) So qual è il quoto.

Dr. Gregory (abbraccia James) Fantastico!

Voce fuori campo QUAL È IL QUOTO?

5. Il ministero dei calcoli stupidi

(punti 30)

Stanza di un ministero; un impiegato sta scrivendo gruppi di quattro cifre su un foglio. Entra un collega.

Impiegato Ho finito il lavoro per oggi.

Collega Che cosa dovevi fare?

Impiegato Scrivere tutte le permutazioni di 2015—anche quelle con 0 come cifra più a sinistra—perché il ministro vuole sapere la somma di tutti questi numeri.

Collega Che somma ti è venuta?

Impiegato Quella la calcolo durante il mese che viene.

Voce fuori campo CHE SOMMA CALCOLERÀ?

[Scrivere le prime quattro cifre da sinistra del risultato.]

6. Robinson Crusoe (versione geometrica)

(punti 30)

Su una spiaggia deserta, un uomo disegna nella sabbia un esagono regolare. A partire da questo disegna sei triangoli equilateri, ciascuno con un lato coincidente con un lato dell'esagono ed esterno all'esagono; ottiene così una stella a 6 punte. Sempre disegnando con il piede, traccia segmenti a congiungere coppie di vertici consecutivi della stella, esterni all'esagono, ottenendo un nuovo esagono, più grande del precedente. Infine, collega tutti i vertici dell'esagono iniziale (quello più piccolo) con il centro di quell'esagono.

Voce fuori campo QUAL È IL PRODOTTO TRA IL NUMERO DI TRIANGOLI EQUILATERI PRESENTI NELLA FIGURA DISEGNATA SULLA SABBIA E IL NUMERO DI TRIANGOLI NON EQUILATERI NELLA STESSA?

7. Sketch scientifico

(punti 30)

Laboratorio segreto, due scienziati con il camice guardano la lavagna. Sulla lavagna c'è scritto: $a_0 = \frac{1}{2}$ $a_{n+1} = \frac{a_n - 1}{a_n + 1}$ per n in \mathbb{N} .

Primo scienziato È la definizione di una successione per ricorsione.

Secondo scienziato Scommetto che a_{2015} è positivo.

Primo scienziato Ci sto! Scommetto tanti euro quanto il valore assoluto della sua parte intera.

Voce fuori campo CHI VINCE LA SCOMMESSA E QUANTO VINCE?

[Scrivere 1 come prima cifra se il primo scienziato vince la scommessa, scrivere 2 altrimenti. Usare le tre restanti cifre per indicare la somma in euro vinta.]

8. 2001: odissea nello spazio (versione aritmetica)

(punti 35)

Si vede un cubo trasparente che fluttua nello spazio cosmico, in sottofondo Also Sprach Zarathustra di R. Strauss: un'asta, totalmente all'interno del cubo, collega due vertici diametralmente opposti. Una mano compare dallo spazio profondo, impugna una sega rotante; non fa rumore perché è nello spazio profondo. Vibra un colpo lineare violentissimo che passa per un vertice del cubo e, muovendosi perpendicolarmente all'asta, la taglia in due.

Voce fuori campo QUANTO VALE 1000 VOLTE IL RAPPORTO TRA LA PARTE PIÙ LUNGA E LA PARTE PIÙ CORTA DELL'ASTA TAGLIATA?

9. Rompendo le notizie**(punti 35)**

Telegiornale. Sotto scorre la scritta BREAKING NEWS.

Annunciatore Un matematico ha trovato un modo per usare tutte le cifre dall'1 al 9, una e una sola volta, nell'espressione

$$\sqrt{ABC} = D + E + F + G + H + I$$

in modo tale che questa risulti corretta.

Sotto scorre la scritta ABC vuol dire $100 \times A + 10 \times B + C$.

Annunciatore Lo intervistiamo per farci dire quale numero ha scritto sotto la radice.

Voce fuori campo CHE NUMERO HA SCRITTO SOTTO LA RADICE?

10. Cast Away (versione probabilistica)**(punti 40)**

Si vede un poligono regolare con 2016 lati che galleggia sul mare calmo.

Voce fuori campo SCELTI A CASO TRE VERTICI DISTINTI DI ESSO, QUAL È LA PROBABILITÀ CHE FORMINO UN TRIANGOLO RETTANGOLO?

[Rispondere con la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.]

11. Frankenstein Junior (versione numerica)**(punti 40)**

Un castello su un picco, il vento sibila, i lupi ululano. In una stanza enorme una nobildonna sta parlando all'Impacchettatore Ufficiale (I.U.).

Duchessa Alla festa in maschera farò un dono a ogni invitato. I.U., devi impacchettare i doni per tutti gli invitati. Ne voglio un terzo piccoli, un terzo medi e un terzo grandi. Il mio maggiordomo ti mostrerà i fogli di carta regalo e ti spiegherà come fare. Lo ha sempre fatto lui.

Maggiordomo (nascosto dietro a una colonna, parla da solo) Ho sempre impacchettato io i doni per gli invitati. Gliela faccio pagare all'I.U.. (Si fa avanti e si rivolge all'I.U.) Ecco i fogli: ce ne sono 50 di misura piccola, 199 di misura media e 250 di misura grande. Ogni pacchetto può essere fasciato con una carta della stessa misura (ad esempio, un pacchetto piccolo con carta piccola) o di misura più grande (ad esempio, un pacchetto piccolo con carta grande), mai di misura più piccola (ad esempio, un pacchetto grande con carta media).

Duchessa (all'I.U.) Ti pagherò 2€ per ogni regalo fasciato con carta della stessa grandezza, 1€ per ogni pacco fasciato con carta non della sua grandezza, non ti darò nulla per ogni regalo non fasciato. Dimenticavo: i miei ospiti saranno 300.

La Duchessa esce dal salone. Con i segni della vendetta sul volto, il maggiordomo ruba un foglio di carta dalla scorta dei fogli dell'I.U. ogni volta che l'I.U. impacchetta un regalo. L'I.U. vede quel che fa il maggiordomo e adotta la strategia migliore per guadagnare più soldi così come il maggiordomo adotta quella migliore per fargliene guadagnare meno.

Voce fuori campo QUANTI EURO RICEVE L'I.U. PER IL SUO LAVORO?

12. Sketch matematico**(punti 40)**

Due matematici davanti a una lavagna. Sulla lavagna c'è scritto:

$$f(0) = 0 \quad f(1) = 1 \quad f(2n) = f(n) \quad f(2n+1) = f(n) + f(n+1) \quad \text{per } n \text{ in } \mathbb{N}, n > 0.$$

Terry È la definizione per ricorsione della funzione fusc di Dijkstra.

Graham Permette di elencare i numeri razionali positivi senza ripetizioni, prendendo

$$r_m = \frac{f(m)}{f(m+1)}$$

per m intero positivo.

Voce fuori campo PER QUALE m SI HA $r_m = \frac{7}{8}$?

13. *Le inchieste del commissario Maigret (versione logica)* (punti 40)

Centrale di polizia francese molto affollata: ci sono 2015 sospettati di una rapina in banca: tra di loro c'è il colpevole e tutti i sospettati sanno chi esso sia.

Maigret Abbiamo dato a tutti il siero?

Poliziotto Sì, capo. E durerà per mesi. Ma lo sa che funziona male, a rimbalzo?

Maigret Che cosa vuoi dire?

Poliziotto Se chi l'ha ricevuto mente un giorno, allora dice la verità il giorno dopo.

Maigret Ascolta, facciamo così: oggi facciamo la domanda «Chi è il colpevole?» a qualche sospettato, uno alla volta. L'interrogato deve rispondere, altrimenti si fa cinque anni di carcere per favoreggiamento. Mettiamo tutti in gattabuia di notte. Domani facciamo ancora la stessa domanda a chi vogliamo tra i sospettati. E continuiamo così fino a che non scopriremo il colpevole.

Poliziotto A proposito, c'è uno dei sospettati che dice sempre la verità.

Maigret Questo è importante. Sai dirmi chi è?

Poliziotto No.

Maigret Fa lo stesso. Cominciamo perché ci vorranno giorni per finire questa indagine.

Voce fuori campo DOPO QUANTE DOMANDE, COME MINIMO, MAIGRET HA LA CERTEZZA DI SAPERE CHI È IL COLPEVOLE?

14. *Harry ti presento Sally (versione combinatoria)* (punti 50)

Un bar pieno di gente, al tavolo due amici parlano animatamente.

Sally Sei un bastardo! Mi devi un sacco di soldi e non ti ricordi quanto?

Harry Hai ragione! Facciamo così: giochiamoci il debito.

Harry scrive a matita tutti i numeri interi da 0 a 16384.

Harry Ci alterniamo a cancellarne (la parte intera del)la metà di quelli che compaiono ancora scritti; ti pagherò in euro la differenza tra il più grande e il più piccolo dei due numeri rimasti. *(Con aria di sfida)* Comincia tu.

Con una gomma Sally ne cancella 2^{13} , poi Harry cancella 2^{12} dei rimanenti, e così via finché Harry ne cancella 1. Sally attua la migliore strategia per ottenere più denaro possibile, Harry fa lo stesso per pagare il meno possibile.

Voce fuori campo QUANTI EURO DOVRÀ PAGARE HARRY A SALLY?

15. *La spia che mi amava (versione geometrica)* (punti 50)

Si vede un cubo trasparente che fluttua nello spazio cosmico, in sottofondo il secondo movimento del Concerto n. 21 per pianoforte e orchestra di W.A. Mozart. Una mano compare dallo spazio profondo, impugna una biro e segna tutti i centri delle facce. Traccia poi i segmenti di congiunzione tra centri di facce adiacenti generando un solido all'interno del cubo.

Voce fuori campo QUANTO VALE IL RAPPORTO TRA IL VOLUME DEL CUBO E IL VOLUME DEL SOLIDO ALL'INTERNO?

16. *Il buono, il brutto, il cattivo (versione probabilistica)* (punti 50)

Un saloon nel Far West, due cowboy seduti a un tavolo; intorno un capannello di curiosi che aspetta di vedere il morto.

Tuco Guarda questa moneta, Biondo. Ha tre facce: testa, croce, fiamma.

Il Biondo È equilibrata?

Tuco Certo! Ti propongo un gioco: se esce testa, chi ha tirato la moneta vince; se esce croce passa la moneta all'altro; se esce fiamma tira ancora. Si continua finché uno dei due giocatori non vince. Comincio io.

Il Biondo *(estraendo la pistola)* No, comincio io.

Voce fuori campo QUAL È LA PROBABILITÀ DI VITTORIA DEL BIONDO?

[Rispondere con la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.]

17. *Being There (versione combinatoria)* (punti 50)

Una serra con 2601 vasi disposti su 51 file a formare un quadrato 51×51 , ciascuno dei lati è rivolto verso uno dei quattro punti cardinali. Un giardiniere pianta un seme nel vaso centrale.

Giardiniere (*parlando ai vasi*) Da domani, casualmente, planterò un seme in ogni vaso vuoto che confini a Nord o a Sud con un vaso già seminato oppure ne planterò uno in ogni vaso vuoto che abbia un vaso seminato tra gli otto vasi che lo circondano. Nel primo caso riuscirò a completare il lavoro in un giorno, nel secondo, invece, mi serviranno due giorni. Lavorerò ogni giorno, ma tra 21 giorni vi lascerò, senza lavorare in quel giorno; me ne vado da qui. Vorrò aver finito comunque; perciò nel ventesimo giorno non inizierò un lavoro che mi richiede due giorni per completarlo.

Voce fuori campo QUANTE CONFIGURAZIONI DIVERSE DI VASI SEMINATI PUÒ OTTENERE IL GIARDINIERE NELLA SERRA QUANDO STARÀ PER ANDARSIENE AL TERMINE DEL PERIODO DI 21 GIORNI?

[Due configurazioni sono da considerarsi diverse se uno stesso vaso è vuoto in una, seminato nell'altra.]

18. *Specchi* (punti 60)

Due matematici davanti a una lavagna.

Michael Ti ho già detto che un numero intero è *a specchio* se ha almeno due cifre e ha almeno un divisore comune maggiore di 1 con il numero letto al contrario.

John Sono tanti: ad esempio, 11, 21, 30, 55.

Michael Certo, certo! Ma non ci sono cinque numeri a specchio consecutivi.

John Non è vero; ho appena trovato la sequenza dei cinque consecutivi più piccoli possibile.

Voce fuori campo QUAL È IL NUMERO MAGGIORE DELLA SEQUENZA TROVATA DA JOHN?

19. *Bingo* (punti 60)

Sala per il Bingo piena di giocatori.

Presentatore Oggi proponiamo un nuovo gioco con 81 palline numerate da 0 a 80: pagando un euro, potrete scegliere tre numeri la cui somma faccia 80 non necessariamente diversi tra loro, in ordine crescente.

Spettatore Ma come faccio a mettere in ordine crescente 20, 20 e 40?

Presentatore (*in tono ironico*) Per il nostro giocatore m.a.t.e.m.a.t.i.c.o, spieghiamo che, se paga un euro, scrive tre numeri n, m, k tali che $n + m + k = 80$ e $0 \leq n \leq m \leq k \leq 80$ e partecipa al gioco; (*rivolto allo spettatore*) va bene così? (*rivolto a tutti*) Estraggo a caso una pallina dal sacchetto con le 81 palline numerate da 0 a 80. Chi ha scritto il numero estratto vince 10 euro.

Spettatore Li ho scritti e ho pagato l'euro, ma questo gioco è una truffa!

Il presentatore prende una pistola e spara nella direzione dello spettatore.

Voce fuori campo QUAL È LA PROBABILITÀ CHE LO SPETTATORE, SCELTI TRE NUMERI A CASO COME RICHIESTI DALLE REGOLE, VINCA?

[Rispondere con la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.]

20. *Galaxy Song (versione geometrica)* (punti 60)

Si vede un cubo che fluttua nello spazio cosmico, in sottofondo Galaxy Song di Eric Idle. Lentamente sparisce una parte del cubo, compresa tra due piani paralleli distinti, ciascuno passante per tre vertici che non stanno sulla stessa faccia, fino a quando resta soltanto una sfera tangente ai due piani.

Voce fuori campo SAPENDO CHE LA DIAGONALE PRINCIPALE DEL CUBO È DI 7056 mm, QUAL È LA LUNGHEZZA IN mm DEL RAGGIO DELLA SFERA?

21. *È...* (punti 70)

Voce fuori campo PER QUANTE COPPIE ORDINATE (n, p) , CON n INTERO POSITIVO MINORE O UGUALE A 200 E p NUMERO PRIMO, LA SOMMA $p^2 + np$ È QUADRATO DI UN NUMERO INTERO?

Compare un piede che pesta fuori campo.

[Si ricorda che 1 non è un numero primo.]

22. Poste e pensioni

(punti 70)

Interno di un ufficio postale. Sei pensionati in coda davanti all'unico sportello aperto.

Terry Io vado a giocarmi la pensione alle slot machine qui a fianco.

Gli altri pensionati Anch'io! Anch'io!

Impiegato (*dietro alla sportello*) Devo chiudere per qualche minuto. Prendete il numero crescente di posizione in coda. (*Dà un foglietto con il numero 1 al primo in coda, un foglietto con il numero 2 al secondo in coda, e così via. Esce.*)

Terry Sempre così: non hanno i soldi per pagare e vanno a cercarli in giro. (*Brontolando, va a sedersi con gli altri pensionati.*)

L'impiegato rientra. I pensionati, vedendolo, si precipitano arrancando e spingendosi davanti allo sportello senza usare il foglietto che l'impiegato aveva dato loro.

Impiegato Calma! Calma! (*Non ha effetto.*) Vi propongo un gioco migliore delle slot machine. Se riesce, pagherò tre volte la pensione a tutti. Se non riesce, non pagherò nulla.

Tutti i pensionati (*urlando*) SÌ! SÌ! SÌ! SÌ!

Impiegato Il gioco è questo: l'ultimo della coda guarda il numero che ha in tasca. Se è 6, la prima fase del gioco finisce; se non è 6, il pensionato va ad occupare la posizione indicata dal suo numero, spostando colui che occupava quella posizione. La persona costretta a spostarsi, guarda a sua volta il numero che ha in tasca. Se è 6, va alla fine della coda e la prima fase del gioco finisce; altrimenti va ad occupare la posizione indicata dal suo numero, spostando quindi un altro pensionato che deve controllare il numero che ha in tasca, e così via. Il gioco riesce—e vi pago tre volte le pensioni—esattamente se, dopo la prima fase, tutte le persone hanno occupato la posizione corretta, cioè quella che hanno sul foglietto.

Voce fuori campo QUAL È LA PROBABILITÀ CHE I PENSIONATI VENGANO PAGATI?

[Rispondere con la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.]

23. Ruoli

(punti 80)

Aula in una scuola.

Professore In un triangolo ABC , sia M il punto medio di BC e sia N il punto su BC tale che $\widehat{BAN} = \widehat{CAM}$. Si sa che $5AB = 8AC$.

Alunno (*al professore*) Bene! Quanto vale il rapporto tra NB e NC ?

[Rispondere con 1000 volte il rapporto richiesto.]

24. Filosofia a dadi

(punti 80)

Un bar in periferia. Un capannello di persone, ciascuna con almeno un libro in mano, sta intorno a un tavolo dove due avventori stanno per giocare a dadi.

Nietzsche Platone aveva determinato la perfezione nei cinque solidi regolari. Eccoli riprodotti in questi cinque dadi, ciascuno con le facce numerate a partire da 1 fino al numero delle facce.

Kant È una constatazione banale!

Schelling Basta chiacchierare! Giocate!

Marx Fate correre quei dadi.

Hegel Basta con la sintesi; un po' di tesi e di antitesi! Datevi da fare con quei dadi!

Kant Temo che stiano male interpretando i miei imperativi. Seguiamo Aristotele: escludiamo ottaedro, dodecaedro e icosaedro. (*Ulteriori, vibrare proteste dagli astanti.*) D'accordo: ho avuto un ripensamento. Escludiamo solo l'icosaedro.

Nietzsche Allora si gioca così: riponiamo gli altri quattro dadi in un sacchetto. Tu ne peschi due, in modo del tutto casuale; io prendo i due rimasti. Poi, contemporaneamente, lanciamo i dadi che abbiamo pescato. Vinci tu se la somma dei numeri che ottieni tirando i tuoi dadi è maggiore della somma dei numeri che ottengo tirando i miei dadi.

Kant (*mostrando superiorità intellettuale*) Ci sto.

Voce fuori campo QUAL È LA PROBABILITÀ DI VITTORIA DI KANT?

[Rispondere con 10000 volte il risultato.]