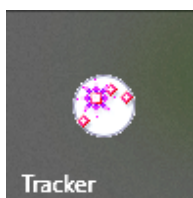


Esercitazioni guidate per l'uso del s/w di video-modellizzazione *Tracker*

abbinate al Corso di Aggiornamento per Insegnanti
“A scuola di Laboratorio 2021”
Dipartimento FIM Modena, 07 settembre 2021

(a cura del prof. Gabriele Tassinari)



Esercitazione 1 - Caduta di una goccia d'acqua in olio

Scopo

Determinare la velocità di caduta di una goccia d'acqua in olio da cucina all'interno di un cilindro graduato di vetro.

Premessa alla prova

La goccia d'acqua si produce con una pipetta e si appoggia sulla superficie libera dell'olio. A causa della tensione superficiale, la goccia aderisce alla superficie senza cadere. Per staccarla dalla superficie utilizziamo l'estremità non appuntita di una matita premendola delicatamente per non modificarne il volume. La goccia d'acqua è sottoposta durante la caduta alla forza di gravità, ed in verso opposto alla spinta di Archimede ed a una forza viscosa dovuta all'olio direttamente proporzionale alla velocità. La goccia raggiunge una velocità limite costante praticamente subito dopo il distacco che genera un moto rettilineo uniforme lungo la direzione verticale.

La goccia durante la caduta appare deformata a causa della rifrazione della luce che diffonde attraverso le pareti di vetro del cilindro. Se la goccia è osservata dall'alto, attraverso l'imboccatura del cilindro dove non c'è il vetro, appare invece sferica. Negli "Esempi di elaborazione" in fondo all'esercitazione sono suggeriti i quadri e la dimensione del passo per produrre il videoclip.

Dati per l'esercitazione

Video	Unità di misura della lunghezza
<i>Caduta goccia acqua in olio 1</i>	distanza tra due tacche adiacenti del cilindro: 15.0 mm
<i>Caduta goccia acqua in olio 2</i>	distanza tra due tacche numerate del cilindro: 16.9 mm
<i>Caduta goccia acqua in olio 3</i>	sensibilità della scala graduata del righello: 1 mm

Frequenza di registrazione con lo smartphone: 30 fps

Frequenza di riproduzione: 30 fps

Tipologia del videoclip: gli intervalli di tempo riprodotti da Tracker sono reali ($\Delta t = \Delta t_T$)

Attività proposta

Importare uno a scelta tra i tre video presenti nella cartella di lavoro. Utilizzando le funzioni del player di Tracker generare un videoclip sul quale:

- Determinare il grafico posizione - tempo per verificare che il moto è rettilineo uniforme orientando l'asse x verso il basso e con l'origine centrata sulla posizione iniziale della goccia.
- Utilizzando la funzione di fit ($A*t + B$), determinare i migliori valori dei parametri A, B che permettono di interpolare al meglio i punti del grafico. Dedurre la velocità di caduta della goccia in mm/s dal valore dei parametri precedenti.
- Nel video "*Caduta goccia acqua in olio 3*" sono visibili due gocce in caduta una di volume maggiore dell'altra. Per il tracciamento delle posizioni consiglio di prelevare i dati necessari nell'ultima parte del video dove le gocce appaiono ben separate tra loro. Sovrapponendo le frecce dei vettori velocità dopo averli opportunamente ingranditi in un dato quadro del videoclip, verificare che la goccia di dimensioni maggiori è più veloce dell'altra. Per quale motivo?

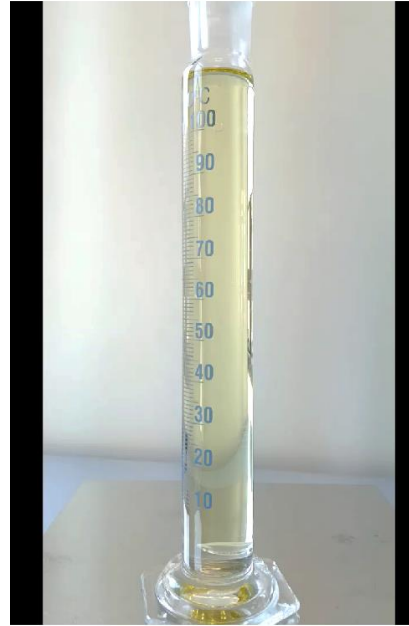
Determinare il rapporto tra le due velocità tramite l'analisi dei dati numerici.

- Esportare il lavoro svolto in un file *.trk ed i dati tabulati in un file *.xls

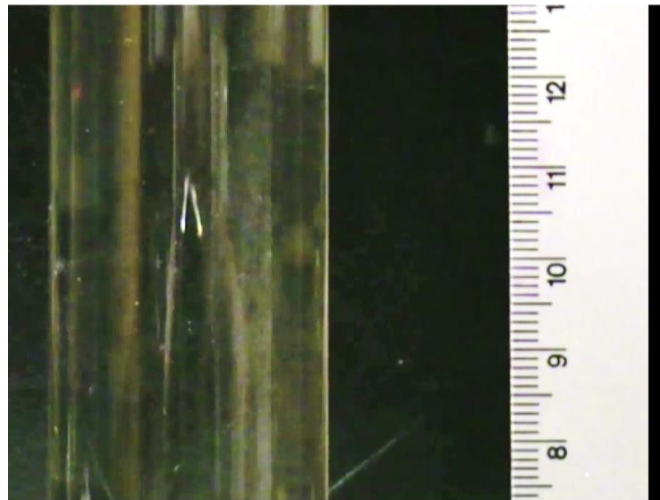
Immagini dei dispositivi



Caduta goccia acqua in olio 1



Caduta goccia acqua in olio 2

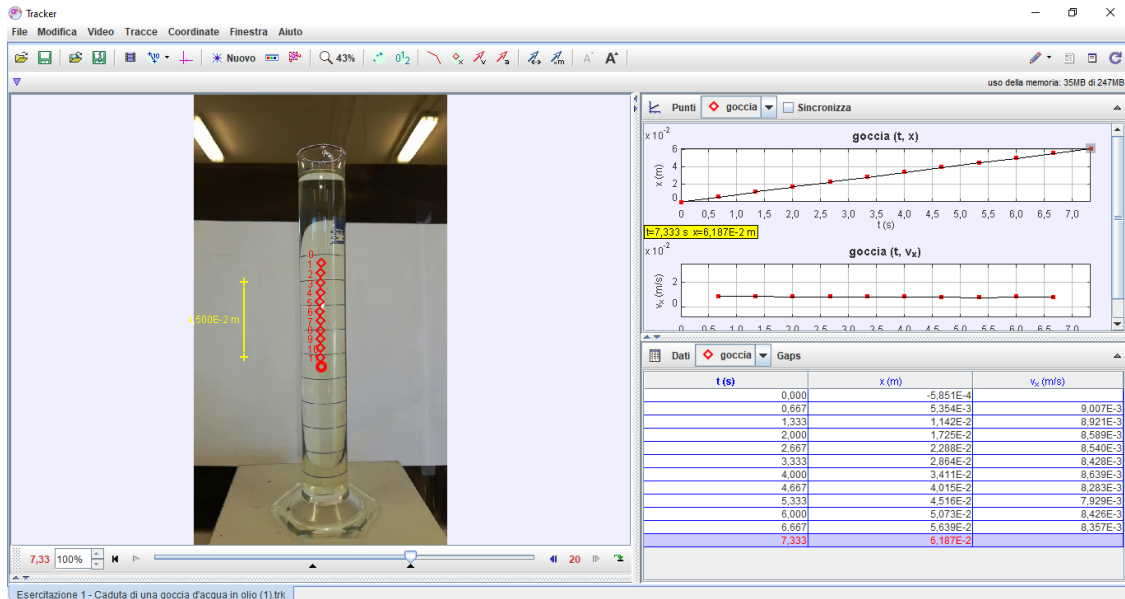


Caduta goccia acqua in olio 3

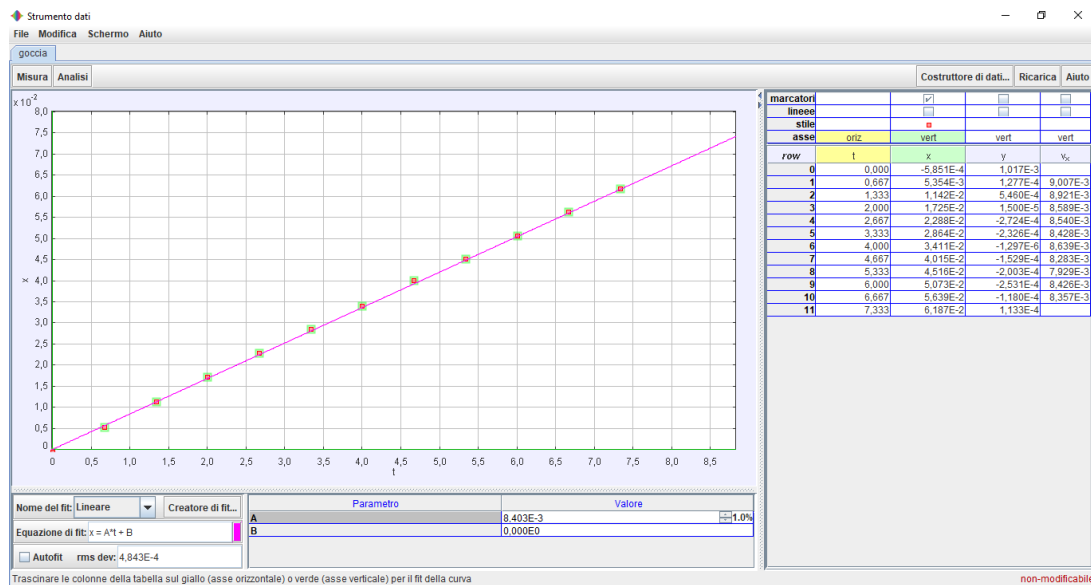
Esempi di elaborazione

1) Video: Caduta goccia acqua in olio 1

videoclip: quadro iniziale 352 - quadro finale 572 - dimensione del passo 20



Le tre viste dell'interfaccia

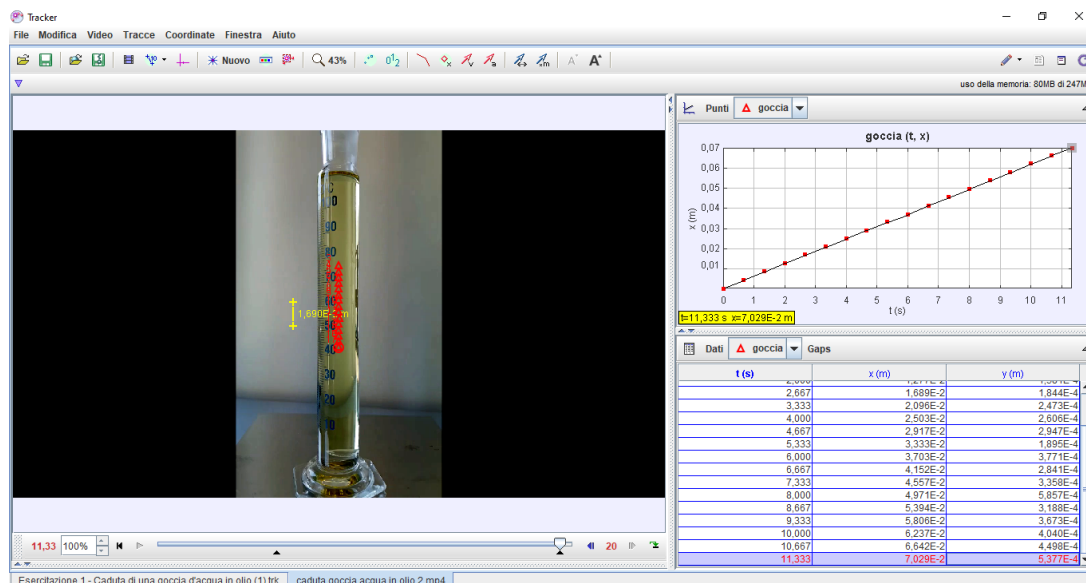


L'analisi dei dati

Velocità della goccia $\cong 8.4$ mm/s

2) Video: Caduta goccia acqua in olio 2

videoclip: quadro iniziale 142 - quadro finale 482 - dimensione del passo 20

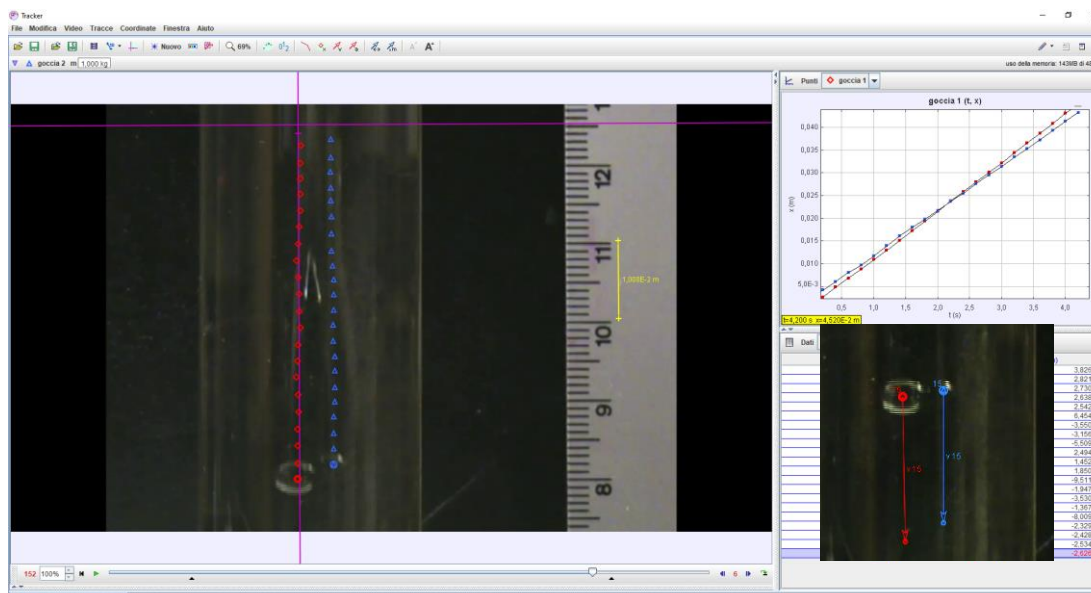


Le tre viste dell'interfaccia

Velocità della goccia $\cong 6.2$ mm/s

3) Video: Caduta goccia acqua in olio 3

videoclip: quadro iniziale 26 - quadro finale 158 - dimensione del passo 6



Le tre viste dell'interfaccia

Velocità della goccia 1: $v_1 \cong 10.7$ mm/s

Velocità della goccia 2: $v_2 \cong 9.8$ mm/s

$$\longrightarrow \frac{v_1}{v_2} \cong 1.1$$

Nell'immagine della vista principale la goccia 1 si muove lungo l'asse x , mentre la goccia 2 su una retta ad esso parallela. In basso a destra, confronto tra i due vettori velocità.

Esercitazione 2 - Caduta libera di una sfera

Scopo

Verificare che il moto di caduta libera di una sfera è rettilineo uniformemente accelerato.

Premessa alla prova

Una sfera di acciaio in caduta libera in aria si comporta con ottima approssimazione come un qualsiasi corpo in caduta libera nel vuoto. Il moto del centro di massa del corpo (baricentro) è rettilineo uniformemente accelerato lungo la direzione verticale ed il valore dell'accelerazione dovuta alla gravità è $g = 9.81 \text{ ms}^{-2}$.

Il video "caduta libera di una sfera" mostra il dispositivo che consente la misura dell'accelerazione di gravità. La presenza di un cronometro elettronico collegato al dispositivo di sgancio della sfera permette anche di effettuare la misura di g combinando gli intervalli di tempo di caduta letti sul cronometro con le distanze note tra due traguardi percorse dalla sfera (Figura 1).

Consiglio il tracciamento manuale prendendo come punto di riferimento il centro della sfera e di utilizzare contemporaneamente lo zoom. Nell' "Esempio di elaborazione" in fondo all'esercitazione sono suggeriti i quadri e la dimensione del passo per produrre il videoclip della caduta dal suo inizio alla fine.

I primi dati sulla velocità conviene scartarli perché l'algoritmo che li calcola può dare risultati poco attendibili perché il tracciamento delle prime posizioni del baricentro avviene in punti quasi coincidenti tra loro.

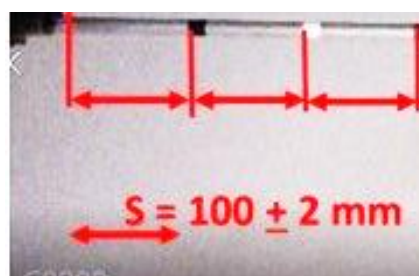
Dati per l'esercitazione



Figura 1

- Distanza S tra due traguardi: $S = 100 \pm 2 \text{ mm}$
- Altezza H di caduta della sfera: $H = 900 \pm 4 \text{ mm}$

Frequenza di registrazione: 500 fps
Frequenza di riproduzione: 25 fps
Tipologia del videoclip: **slow motion**



Attività proposta

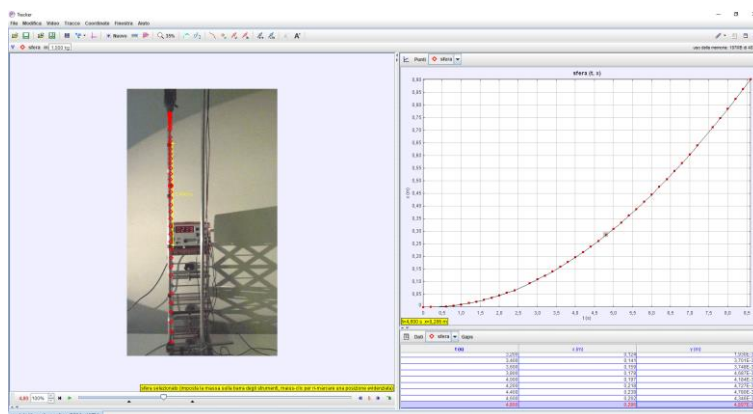
Importare il video “*caduta libera di una sfera*” presente nella cartella di lavoro ed utilizzando le funzioni del player di Tracker generare un videoclip sul quale:

- Orientare l'asse x verticalmente verso il basso con l'origine nella posizione iniziale del baricentro della sfera. Determinare il grafico $x-t$ e velocità - tempo v_x-t per verificare che il moto è rettilineo uniformemente accelerato;
- Utilizzare i dati di posizione e velocità calcolati per determinare le corrispondenti funzioni di fit. Usare la funzione parabolica di fit ($A \cdot t^2 + B \cdot t + C$) per il grafico $x-t$ e quella lineare ($A \cdot t + B$) per il grafico v_x-t . Determinare i valori dei parametri A, B e C che permettono di interpolare al meglio i punti dei grafici;
- Ricavare l'accelerazione g , il tempo di caduta Δt e la velocità v della sfera al termine della caduta utilizzando i valori dei parametri precedenti. Per rispondere al terzo punto ricordare che l'accelerazione a_T ed il tempo di caduta Δt_T calcolati da *Tracker* sono collegati a g e Δt dalle seguenti trasformazioni: $g = 400 a_T$; $\Delta t = (1/20) \Delta t_T$
- Esportare il lavoro svolto in un file *.trk ed i dati tabulati in un file *.xls

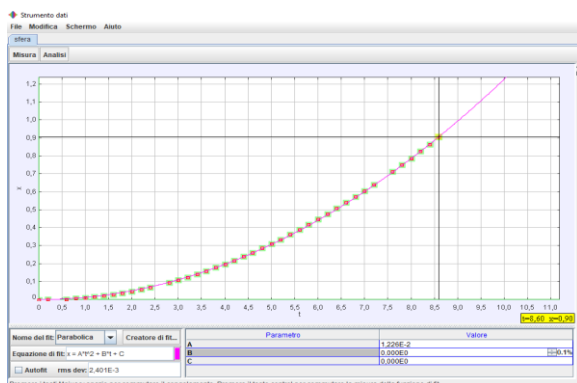
Esempio di elaborazione

Video: *Caduta libera di una sfera*

videoclip: quadro iniziale 174 - quadro finale 394 - dimensione del passo 5



Le tre viste dell'interfaccia

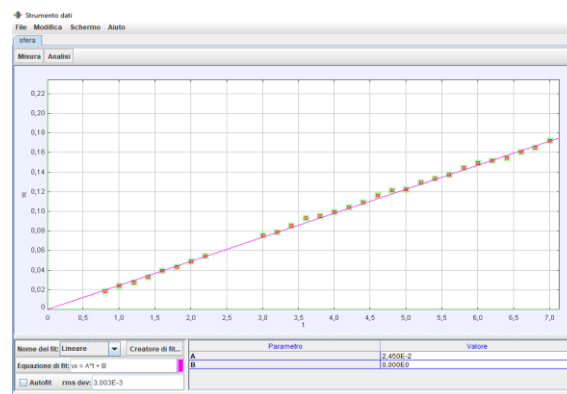


Parametri del fit e grafico $x-t$

$$A = \frac{1}{2} a_T = 0.01226 \text{ ms}^{-2}, B = C = 0.$$

$$g = 400 a_T = 400 (0.02452) \text{ ms}^{-2} = 9.81 \text{ ms}^{-2}$$

$$\Delta t = (1/20) \Delta t_T = (1/20)(8.60 \text{ s}) = 0.43 \text{ s}$$



Parametri del fit e grafico v_x-t

$$A = a_T = 0.0245 \text{ ms}^{-2}, B = 0.$$

$$g = 400 a_T = 400 (0.0245) \text{ ms}^{-2} = 9.80 \text{ ms}^{-2}$$

$$v = g \Delta t = (9.80)(0.43) = 4.2 \text{ ms}^{-1}$$

Esercitazione 3 – Moto del giradischi

Scopo

Verificare che il moto del piatto di un giradischi è rotatorio uniforme.

Premessa alla prova

Il video “*Moto del giradischi*” illustra un giradischi per dischi in vinile da 33 giri/min, i popolari LP (Long Playing) molto diffusi negli anni '70. L'analisi del moto è resa possibile dalla presenza di un tappo di plastica posto sul bordo del piatto. Il tracciamento delle posizioni del centro del tappo permette la verifica delle due leggi orarie del moto armonico semplice lungo i due assi perpendicolari di un sistema di coordinate cartesiane con origine nel centro del piatto. Prima di procedere con il tracciamento suggerisco di attivare il filtro per correggere l'effetto di prospettiva della ripresa video in modo da avere il piano del giradischi perpendicolare alla linea visuale. Conviene poi orientare l'asse x del sistema di riferimento lungo la congiungente il centro del piatto con il centro del tappo nella sua posizione iniziale. L'autotracciamento funziona abbastanza bene se nel modello compare il cerchio bianco del tappo sullo sfondo nero del piatto (Figura 2).

Nell'Esempio di elaborazione in fondo all'esercitazione sono suggeriti i quadri e la dimensione del passo per produrre il videoclip con due rotazioni complete del piatto, ma per gli scopi della prova può essere sufficiente considerarne anche una sola.

Dati per l'esercitazione

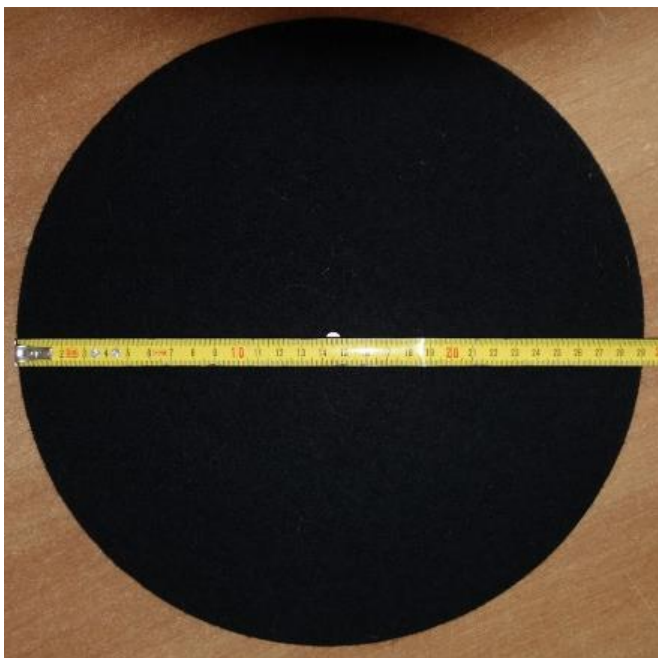


Figura 1: misura del diametro del piatto

- Diametro D del piatto: $D = 29.1 \pm 0.1$ cm

Frequenza di registrazione: 250 fps

Frequenza di riproduzione: 25 fps

Tipologia del videoclip: **slow motion**

Attività proposta

Importare il video “Moto del giradischi” presente nella cartella di lavoro ed utilizzando le funzioni del player di Tracker generare un videoclip sul quale:

- Determinare i grafici delle due componenti $x-t$, $y-t$ del vettore posizione, e v_x-t , v_y-t del vettore velocità del centro del tappo per verificare che il moto del piatto è rotatorio uniforme. È sufficiente verificare che lungo i due assi si presentano due moti armonici sfasati di 90° ;
- Utilizzando i dati di posizione e velocità calcolati determinare le corrispondenti funzioni di fit che meglio li approssimano. Come fit impostare una legge del tipo: $A*\sin(B*t+C)$ essendo A, B e C i parametri da determinare;
- Utilizzando il grafico del moto armonico semplice di una delle due componenti verificare che il periodo T del moto rotatorio del piatto corrisponde ad una frequenza di rotazione di 33giri/min.
- Verificare che tale valore deve essere coerente con il valore di $B = \frac{2\pi}{T}$ che rappresenta la velocità angolare del piatto. Tenere presente che un intervallo di tempo Δt_T tra due misure graficate o tabulate da Tracker corrisponde ad un intervallo di tempo reale $\Delta t = (1/10) \Delta t_T$;
- Visualizzare il vettore velocità ed accelerazione nelle varie posizioni
- Esportare il lavoro svolto in un file *.trk ed i dati tabulati in un file *.xls

Immagine del piatto del giradischi

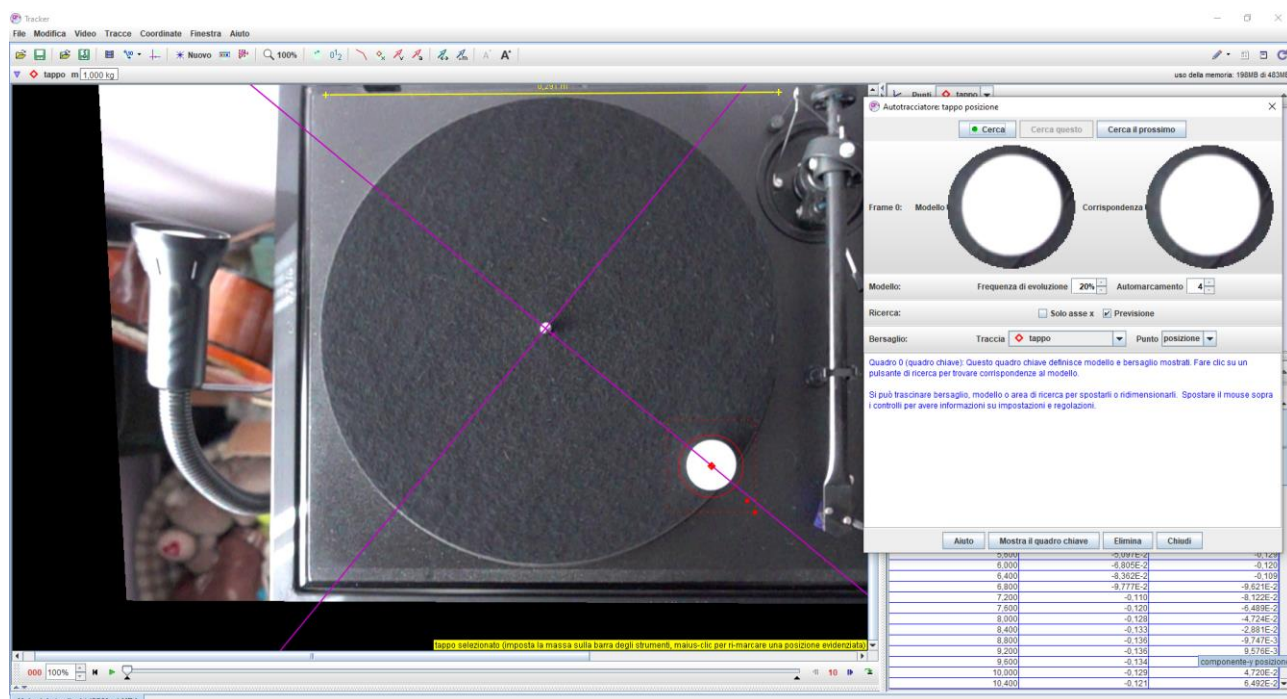
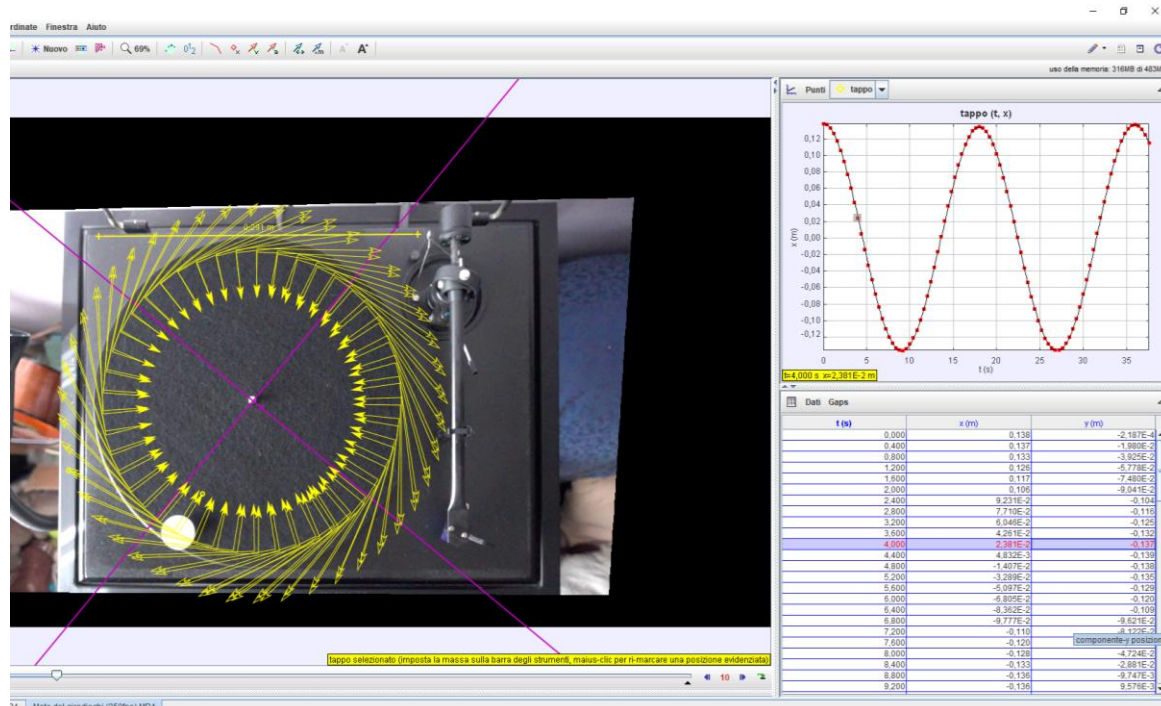


Figura 2: Moto del giradischi e modello per l'autotracciamento

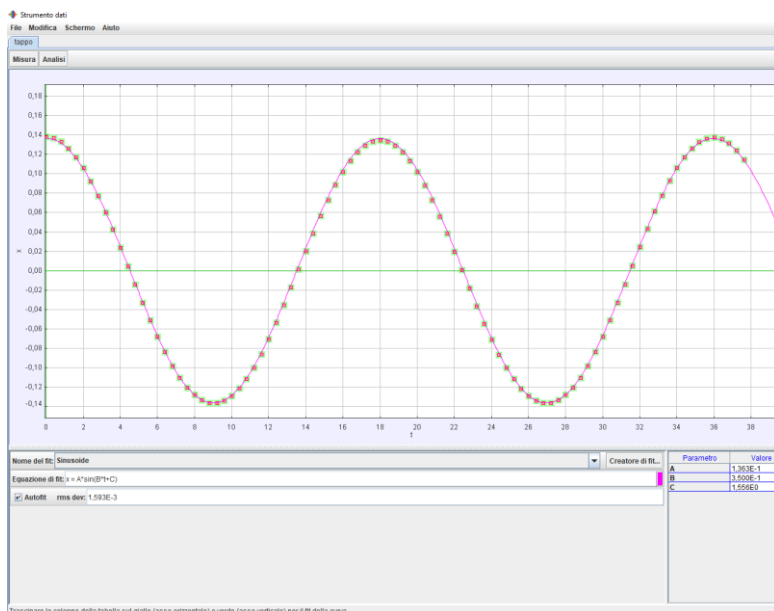
Esempio di elaborazione

Video: Moto del giradischi

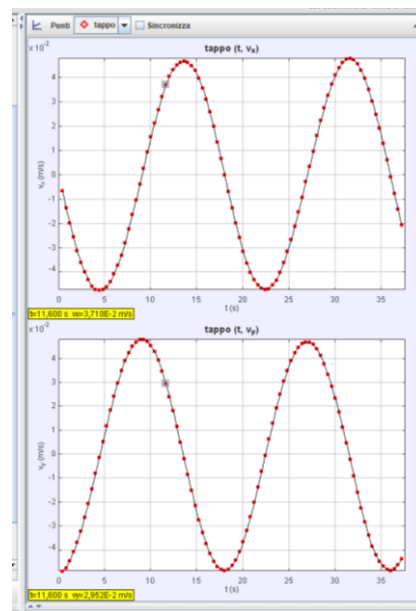
videoclip: quadro iniziale 0 - quadro finale 940 - dimensione del passo 10



Vettori velocità, accelerazione e grafici x-t, y-t



I parametri del fit del grafico x-t



Grafici vx-t, vy-t

$A \cong 13.6 \text{ cm}$; $B \cong 0.35 \text{ s}^{-1}$; $C \cong 1.56 \text{ rad} (89^\circ)$

Periodo atteso $T = \frac{2\pi}{B} = 17.94 \text{ s}$

Periodo misurato dal grafico x-t: $T_T = 18 \text{ s}$

Periodo reale del piatto: $T = 1/10 T_T = 1.8 \text{ s}$

Frequenza di rotazione del piatto $f = T^{-1} \cong 0.55 \text{ Hz} = 33 \text{ giri/min}$

Esercitazione 4 – Moto oscillatorio smorzato su guida arcuata

Scopo

Analizzare il moto oscillatorio smorzato di una sfera di acciaio che rotola senza strisciare su una guida arcuata. Eseguire una modellizzazione dinamica del moto del punto di massa.

Premessa alla prova

Il dispositivo è stato utilizzato dai partecipanti alla prova sperimentale della Gara Nazionale delle Olimpiadi della Fisica 2021 (Figura 1).



Figura 1

La guida arcuata che lo caratterizza è stata realizzata utilizzando una riga da disegno di plexiglas da 60 cm posta sopra una tavoletta di legno. La riga è bloccata al centro con due spilli infilati sulla tavoletta ed è resa arcuata ponendo alle sue estremità due angolari metallici che premono contro un paio di spilli da entrambi i lati e fissati sulla sezione trasversale della tavoletta. Sulla parte superiore della riga nella direzione della lunghezza sono presenti due strisce di carta adesiva separate tra loro da una distanza di circa 5 mm che permettono ad una sfera di acciaio di rotolare *senza strisciare* sul plexiglas non ricoperto dalla carta (la guida). Per effettuare le misure dell'ampiezza di oscillazione, una delle due strisce di carta è parzialmente ricoperta da un nastro metrico millimetrato fissato con nastro trasparente adesivo. Due mollette poste sotto la riga evitano che la sfera mentre rotola la deformi. Il raggio di curvatura della riga nella sua zona centrale è con ottima approssimazione quello di una circonferenza. Se però osserviamo il moto della sfera sopra la riga, lungo la direzione perpendicolare al tavolo di appoggio della tavoletta di legno, esso appare sufficientemente stabile per percorrere la riga arcuata con un moto rettilineo oscillatorio smorzato (Figura 2).

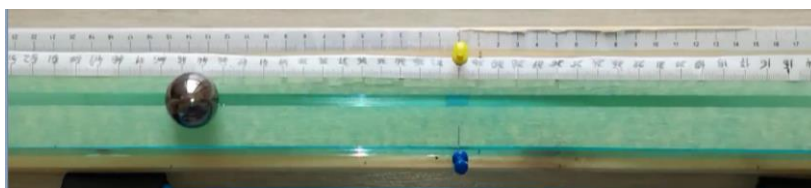


Figura 2

Il moto oscillatorio risulta smorzato per la presenza di una forza F di attrito volvente *costante e sempre opposta al verso della velocità*. Analizzando le leggi orarie di questo moto si scopre che il periodo T *non* dipende dall'ampiezza e che l'ampiezza di oscillazione decresce in modo *lineare*.

Se vogliamo ottenere queste leggi orarie, il modello teorico dinamico deve prevedere una forza di richiamo analoga a quella del moto armonico semplice che si somma ad un attrito costante in modulo direttamente proporzionale alla massa m della sfera, al quadrato della pulsazione $\Omega = \frac{2\pi}{T}$ ed al raggio R della circonferenza:

$$F = k \cdot m \Omega^2 R$$

essendo k il coefficiente di attrito volvente che dipende solo dal materiale della riga e della sfera sulla quale rotola.

Dati per l'esercitazione

- Massa sfera: $m = 67$ g
- Coefficiente dell'attrito volvente: $k \cong 0.003$ (acciaio su plexiglas)
- Raggio della circonferenza che approssima la guida: $R \cong 85$ cm

Frequenza di registrazione: 30 fps

Frequenza di riproduzione: 30 fps

Tipologia del videoclip: gli intervalli di tempo riprodotti da *Tracker* sono reali ($\Delta t = \Delta t_T$)

Attività proposta

Importare il video “*Moto oscillatorio su guida arcuata*” presente nella cartella di lavoro ed utilizzando le funzioni del player di Tracker generare un videoclip sul quale:

- Determinare il grafico posizione-tempo $y-t$ della sfera per verificare che il suo moto è oscillatorio smorzato con ampiezza che decresce linearmente. È necessario fissare un sistema di assi cartesiani con origine sulla linea di mezzeria della riga passante per i due spilli centrali ed orientare l'asse y lungo la direzione della guida (Figura 4).
- L'autotracciamento sul centro della sfera dovrebbe funzionare egregiamente su un buon numero di punti.
- Misurare il periodo T del moto oscillatorio e verificare che è indipendente dall'ampiezza;
- Utilizzando il grafico $y-t$ determinare la corrispondente funzione di fit che meglio lo approssima. Come equazione del fit impostare una equazione del tipo: $(A*t + B)*\sin(C*t + D)$

essendo A, B, C e D i parametri da determinare.

Per le caratteristiche del moto ci aspettiamo che $A < 0$, $C = \frac{2\pi}{T}$ (pulsazione) e B uguale all'ampiezza di oscillazione all'istante iniziale da leggere direttamente sul grafico $y-t$.

Il parametro A rappresenta la pendenza della retta tangente nei punti di massimo della sinusoidale.

- Modellizzazione dinamica:**

scegliendo B come valore iniziale di y verificare che le due componenti della forza:

$$f_x = 0 ;$$

$$f_y = -m*(C^2)*y - k*m*(C^2)*R*sign(v_y/abs(v_y))$$

permettono di trovare una legge oraria teorica del moto compatibile con il grafico $y-t$ ricavato con il tracciamento automatico o manuale del punto di massa scelto. Il primo termine di f_y è la forza di richiamo della componente armonica non smorzata, mentre il secondo è la forza di attrito volvente, costante in modulo, ma con verso sempre opposto alla velocità v_y che determina la componente di smorzamento della forza risultante.

- Esportare il lavoro svolto in un file *.trk ed i dati tabulati in un file *.xls

Allestimento utilizzato per il video

Una disposizione per registrare il video è illustrata in Figura 3.

Una ventina di secondi di registrazione con lo smartphone producono un video di qualche Mb.

Successivamente con le funzioni del cellulare si possono operare opportuni ritagli sul video prima di caricarlo sul PC.



Figura 3

Esempio di elaborazione

Video: Moto oscillatorio su guida arcuata

videoclip: quadro iniziale 192 - quadro finale 552 - dimensione del passo 2

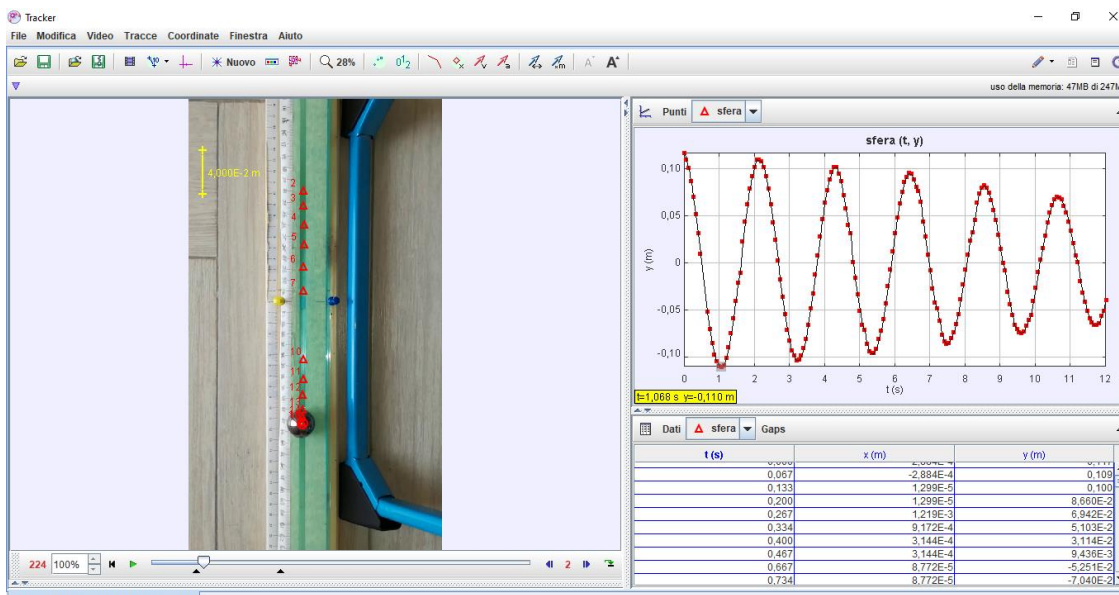
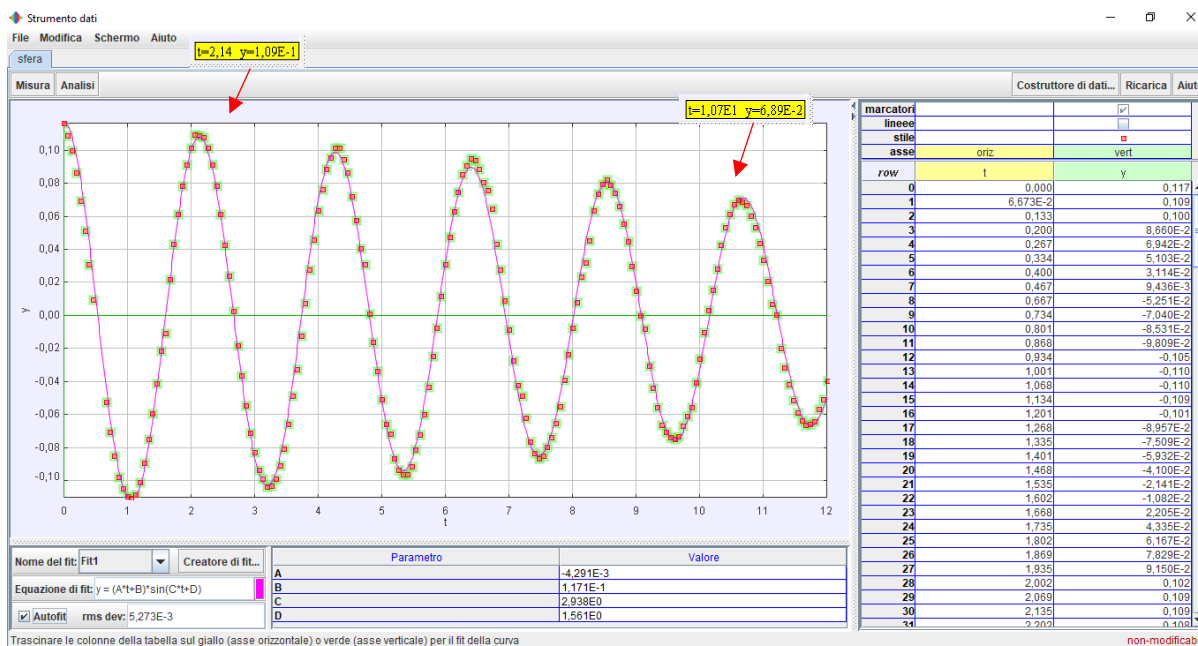


Figura 4: il grafico y-t



Parametri della legge oraria y-t

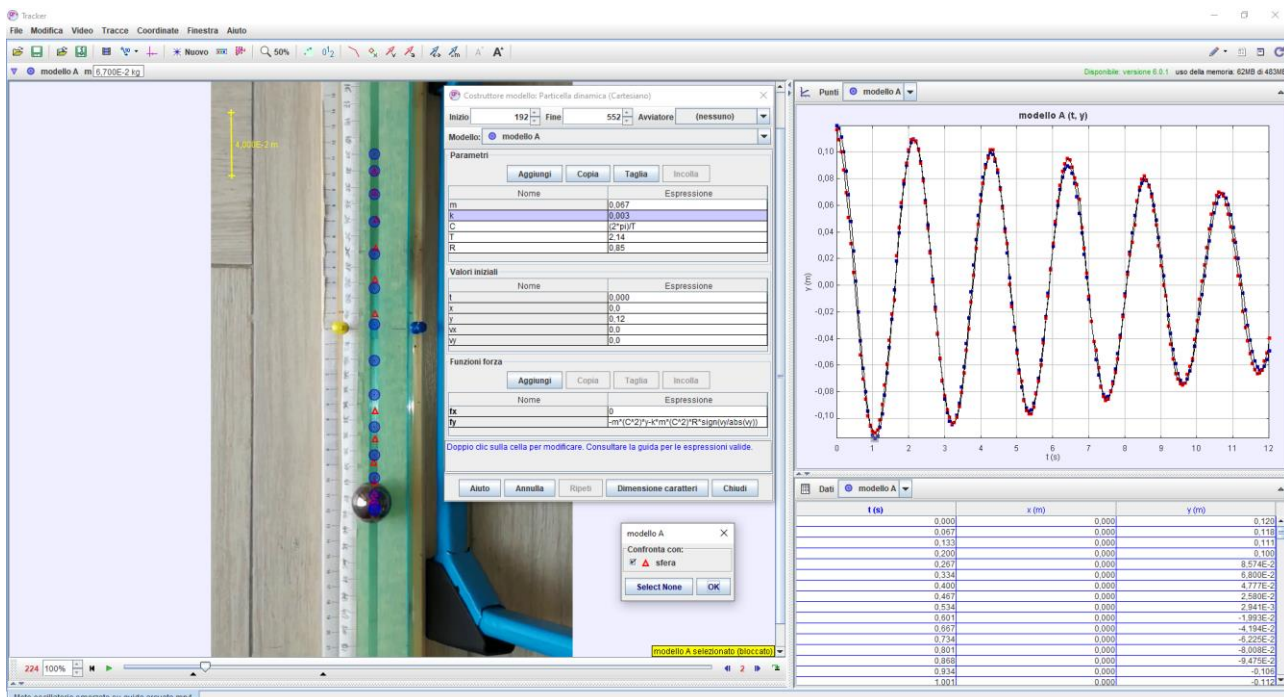
- Equazione fit); $A \cong -0.43 \text{ cm s}^{-1}$; $B \cong 12 \text{ cm}$; $C = \frac{2\pi}{T} \cong 2.94 \text{ s}^{-1}$; $D \cong 1.56 \text{ rad (89.4}^\circ\text{)}$

$$T = \frac{2\pi}{C} \cong 2.14 \text{ s}$$

- Grafico y-t): T (calcolato su 4 periodi) $\cong \frac{(10.7-2.14)s}{4} = \frac{8.56 \text{ s}}{4} = 2.14 \text{ s}$;

$$\text{Pendenza A della retta (calcolata su 4 periodi)} = \frac{(6.89-10.9)\text{cm}}{8.56 \text{ s}} \cong -0.47 \text{ cm s}^{-1}$$

ESERCITAZIONI GUIDATE PER L'USO DEL S/W DI VIDEO - MODELLIZZAZIONE TRACKER



La scheda dei dati del modello dinamico (parametri, valori iniziali e componenti della forza) e confronto tra la legge oraria del punto di massa e quella del modello dinamico. Nella vista principale la traiettoria simulata (cerchietti in blu) e quella ottenuta con il tracciamento del punto di massa (triangoli rossi)

Esercitazione 5 – Moto parabolico

Scopo

Analizzare il moto parabolico di una palla di gomma in uscita da una rampa di lancio. Eseguire una modellizzazione analitica e dinamica del moto del punto di massa.

Premessa alla prova

Il dispositivo impiegato è quello illustrato in Figura 1 che permette di studiare il moto di caduta parabolica di una palla di gomma con velocità iniziale orizzontale in cui sono illustrate le misure dell'altezza di caduta S_y della palla e della sua gittata S_x .

La lunghezza del segmento indicato con n può servire come lunghezza per l'asta di calibrazione. L'altezza h della rampa di lancio è un dato non necessario per lo scopo dell'esercitazione.

Il sistema di riferimento con l'origine nel punto di distacco della palla dalla rampa proposto è quello che semplifica maggiormente lo studio del moto delle componenti x e y del vettore posizione, ma nulla vieta di considerare l'origine anche sul piano orizzontale del dispositivo dove la palla giunge al termine della caduta. Utilizzare il filtro "Ruota" con l'opzione "al contrario" se si desidera avere il moto di caduta della palla in avanti lungo la direzione positiva delle ascisse.

Occorre tenere presente che il video è di tipo "slow motion" per cui i valori dei tempi, delle velocità e delle accelerazioni devono essere riconvertite per avere i valori reali.

Dati per l'esercitazione

Frequenza di registrazione 500 fps

Frequenza di riproduzione: 25 fps

Tipologia del videoclip: **slow motion**

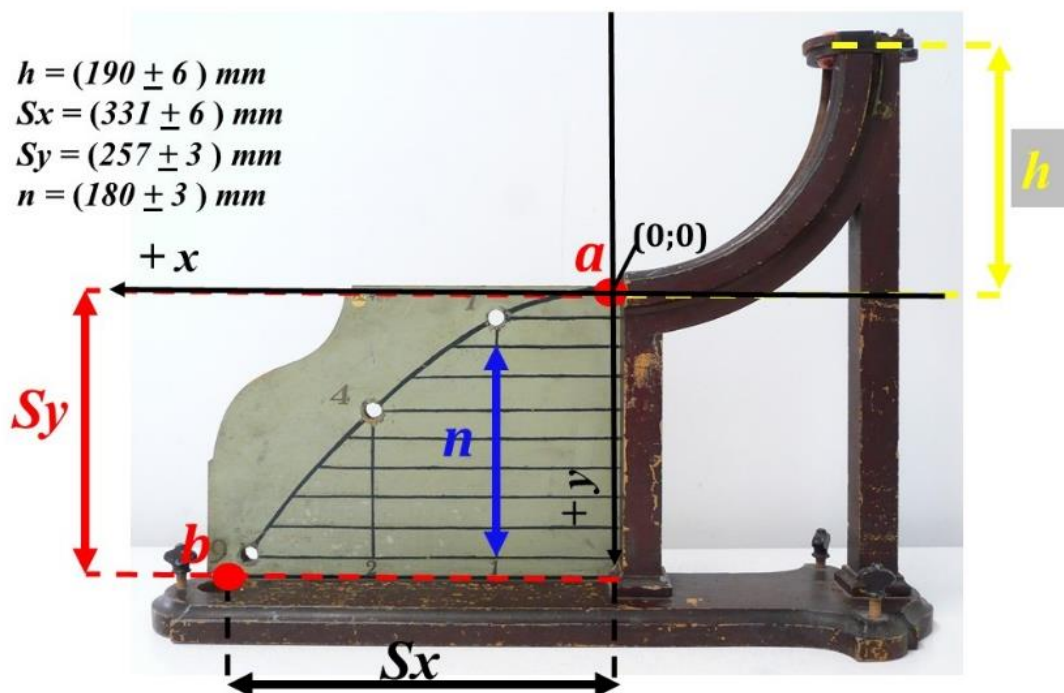


Figura 1: le lunghezze caratteristiche

Attività proposta

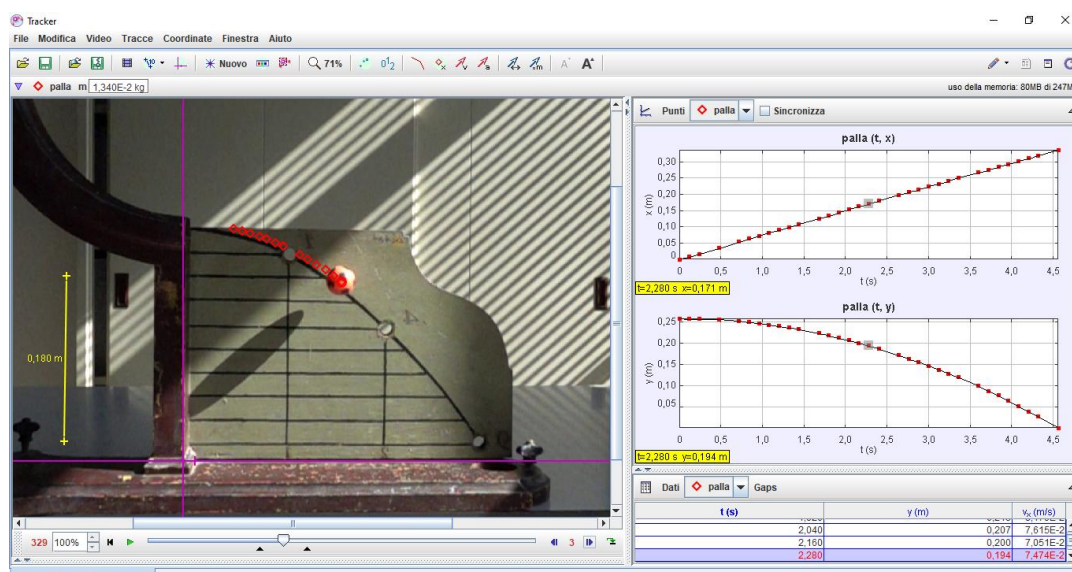
Importare il video “Moto parabolico” presente nella cartella di lavoro ed utilizzando le funzioni del player di Tracker generare un videoclip nel quale:

- Determinare il grafico $x-t$ e $y-t$ delle due componenti del vettore posizione per verificare che il moto della componente x è rettilineo uniforme e quello della componente y uniformemente accelerato. Determinare la velocità orizzontale iniziale della palla.
- Tracciare il vettore velocità in alcune posizioni durante la caduta per verificare che la sua direzione è tangente alla parabola;
- Impostare i parametri per il **modello analitico** (leggi orarie) e lo stato iniziale (posizione e velocità iniziale) del **modello dinamico** del moto parabolico. Visualizzare le traiettorie previste dai due modelli e confrontarle con il vettore posizione del punto di massa durante la caduta.
- Per rispondere al terzo punto occorre ricordare che l'accelerazione a_T e la velocità v_T calcolate da Tracker sono collegate ai valori reali a e v con le trasformazioni $a_T = a/400$ e $v_T = v/20$.
- Esportare il lavoro svolto in un file *.trk ed i dati tabulati in un file *.xls

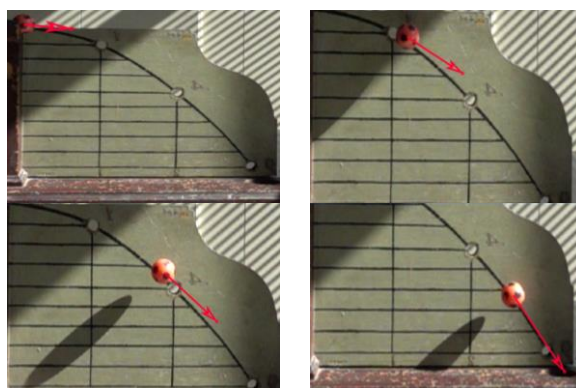
Esempio di elaborazione

Video: *Moto parabolico*

videoclip: *quadro iniziale 272 - quadro finale 386 - dimensione del passo 3*

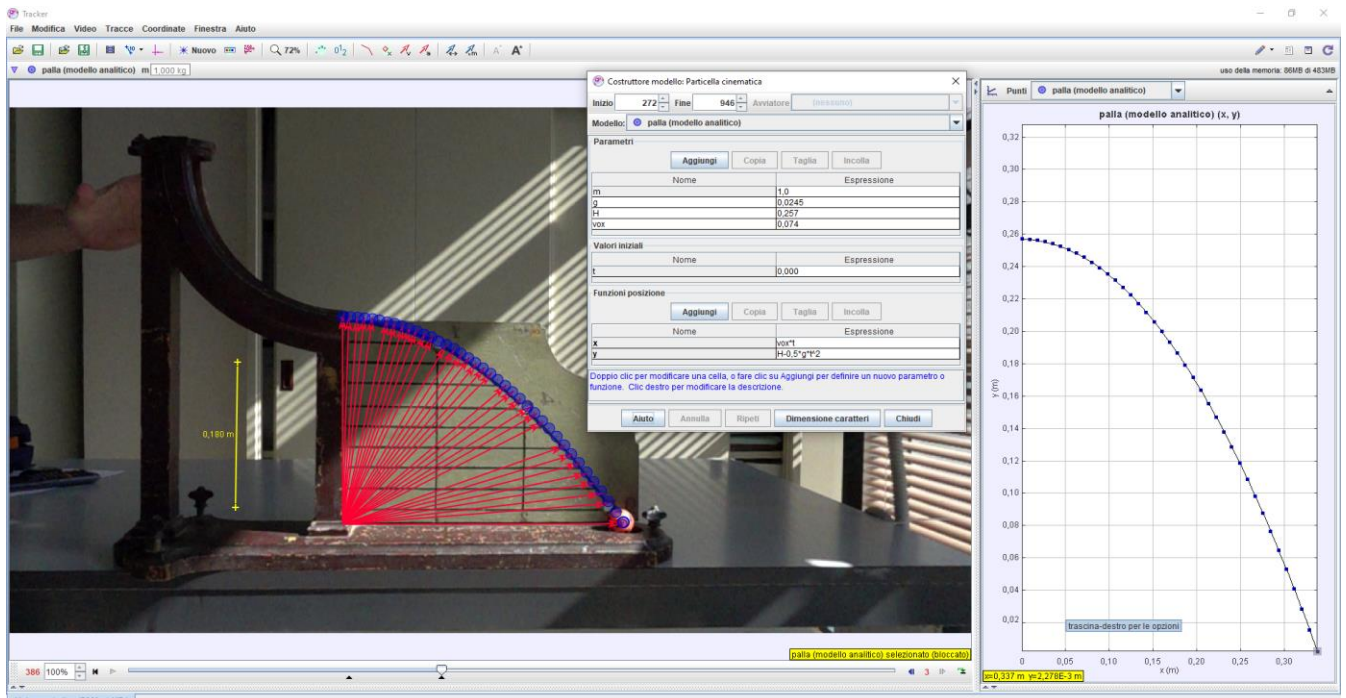


Il grafico $x-t$ e $y-t$

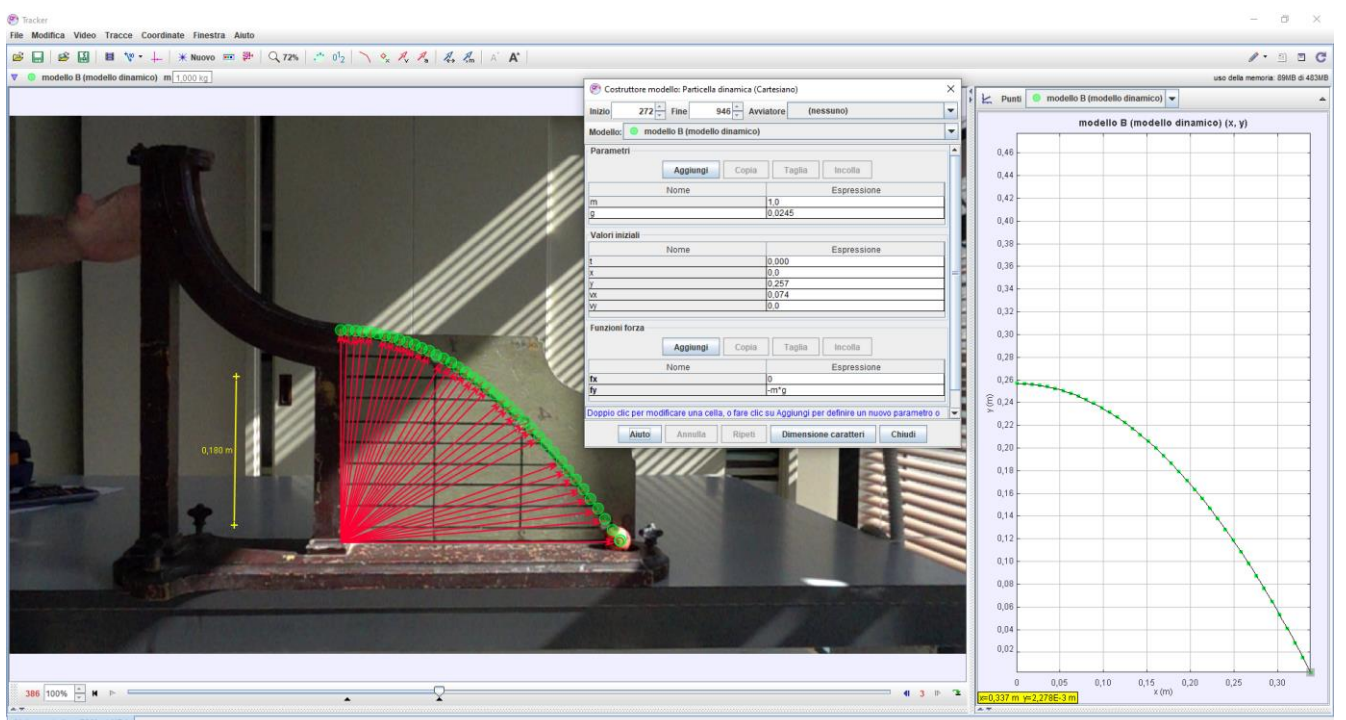


Il vettore velocità in quattro posizioni

ESERCITAZIONI GUIDATE PER L'USO DEL S/W DI VIDEO - MODELLIZZAZIONE TRACKER



*Il modello analitico del moto parabolico
Nella vista principale la traiettoria teorica (cerchietti blu) e quella nel piano x-y*



*Il modello dinamico del moto parabolico
Nella vista principale la traiettoria teorica (cerchietti verdi) e quella nel piano x-y*

Esercitazione 6 – Pendolo elastico

Scopo

Utilizzare la formula del periodo del pendolo elastico per determinare la costante elastica e la massa appesa ad una molla. Eseguire una modellizzazione dinamica del moto del punto di massa.

Premessa alla prova

Un pendolo elastico è un sistema massa-molla che oscilla con ottima approssimazione di moto armonico semplice ad una frequenza che dipende dalla massa oscillante in moto e dalla costante elastica della molla, ma *non* dall'ampiezza di oscillazione. Chiaramente con l'aumentare delle oscillazioni il moto si smorza lentamente principalmente a causa dell'attrito interno alla molla e alla forza viscosa dovuta all'aria circostante. La formula che permette di calcolare il periodo T delle oscillazioni è:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{M}{k}}$$

essendo k la costante elastica ed M la massa oscillante del sistema.

L'autotracciamento delle posizioni funziona abbastanza bene se si sceglie un punto del corpo appeso alla molla che mantiene forma e contrasto costante con lo sfondo circostante durante il moto.

In questa esercitazione, l'istante iniziale del tracciamento corrisponde al momento in cui il punto di massa scelto inverte il suo movimento dal moto verso il basso a quello verso l'alto se osservato nella vista principale. Il motivo è che in tale istante di tempo la sua immagine appare la "meno mossa" tra tutte quelle che si osservano durante il video che non è di tipo slow motion, ed è pertanto la più facile da localizzare. Tale posizione coincide anche con l'origine del sistema di riferimento.

Alla fine di questa esercitazione nella parte "Esempi di elaborazione" sono suggeriti i quadri iniziale e finale da considerare per produrre il videoclip, la dimensione del passo, l'asse ed il verso scelto per lo studio del moto ed il punto per il tracciamento manuale o automatico.

Dati per l'esercitazione

Video	massa appesa alla molla m (g)	costante elastica della molla k (N/m)
<i>Pendolo elastico 1</i>	125 ± 1	9.30
<i>Pendolo elastico 2</i>	225 ± 1	9.30
<i>Pendolo elastico 3</i>	151 ± 1	2.85

Frequenza di registrazione con lo smartphone: 30 fps

Frequenza di riproduzione: 30 fps

Tipologia del videoclip: gli intervalli di tempo riprodotti da Tracker sono reali ($\Delta t = \Delta t_T$)

Immagini dei dispositivi



Pendolo elastico 1



Pendolo elastico 2



Pendolo elastico 3

Attività proposta

Importare uno tra i tre video presenti nella cartella di lavoro. Utilizzando le funzioni del player di Tracker generare un video clip nel quale assumere come origine del sistema di riferimento il punto di inversione più in basso ed asse y diretto verso l'alto in direzione verticale.

- Determinare il grafico posizione-tempo $y-t$ per verificare che il moto lungo y è armonico semplice.
- Utilizzare la funzione di fit per il grafico $y-t$: $A \cdot \sin(B \cdot t + C) + D$ e determinare i migliori valori dei parametri A , B , C e D che permettono di interpolare al meglio i punti del grafico. Tenere presente che il parametro A è l'ampiezza di oscillazione, il parametro B rappresenta la pulsazione del moto armonico e D il termine che permette alla funzione sinusoidale di traslare lungo l'asse y . Si dovrebbe trovare $D \cong A$.

b.1) Ricavare il periodo T del pendolo dal valore di B : $T = \frac{2\pi}{B}$ oppure dal grafico $y-t$.

b.2) Utilizzando la formula del periodo, calcolare la massa oscillante M e verificare se corrisponde alla massa appesa m per verificare se la massa della molla si può trascurare.

- Modellizzazione dinamica** per *Pendolo elastico 1* e *Pendolo elastico 2*:

indicata con y_0 l'ampiezza di oscillazione del pendolo [valore di A dedotto al punto b)], verificare che le due componenti della forza $f_x = 0$ e $f_y = (-k \cdot y + k \cdot y_0)$ permettono di trovare una legge oraria teorica del moto compatibile con il grafico $y-t$ ricavato con il tracciamento automatico o manuale del punto di massa scelto.

- Modellizzazione dinamica** per *Pendolo elastico 3*:

È la parte dell'esercitazione più complicata per la presenza di due moti oscillatori lungo x e y . Lungo x il moto oscillatorio è smorzato, ed inoltre il centro di oscillazione trasla, mentre lungo y il moto è armonico. Indicata con y_0 l'ampiezza di oscillazione del pendolo lungo y [valore di A dedotto al punto b)], verificare che per le seguenti componenti della forza:

$$f_x = -2.4 \cdot x - b_x \cdot v_x + 2.4 \cdot (x_0 + v_0 t) \quad \text{è compatibile con il grafico } x-t \text{ del punto di massa;}$$

$$f_y = -k \cdot y + k \cdot y_0 \quad \text{è compatibile con il grafico } y-t \text{ del punto di massa.}$$

I valori di x_0 e v_0 vanno dedotti dall'analisi del grafico $x-t$, mentre quello di b_x per approssimazioni successive confrontando il grafico del modello con il grafico $x-t$.

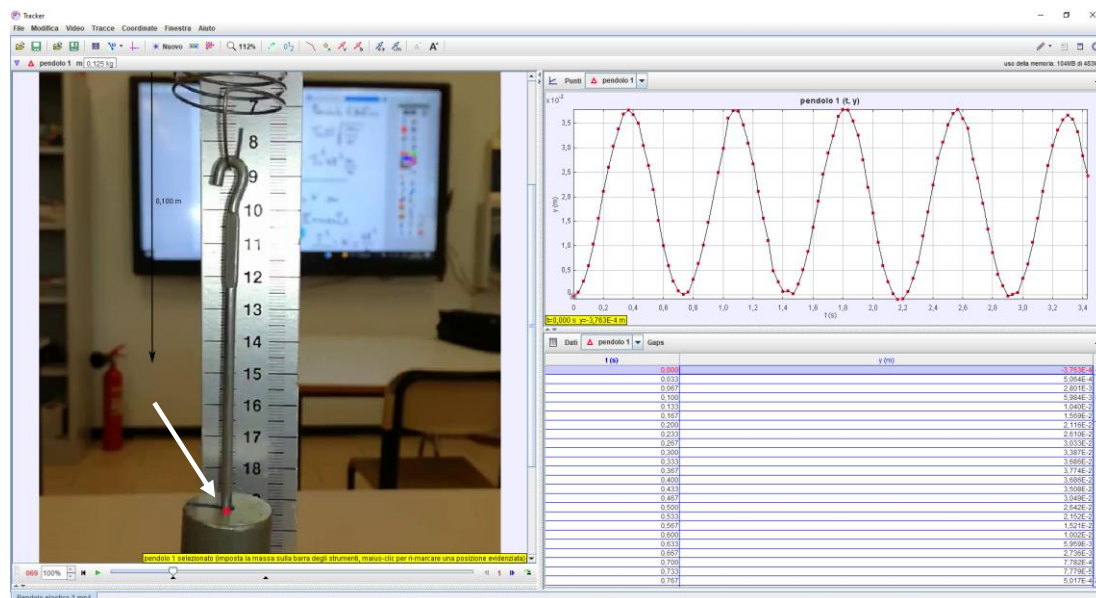
- Esportare il lavoro svolto in un file *.trk ed i dati tabulati in un file *.xls.

Esempi di elaborazione

1) Video: Pendolo elastico 1

Videoclip: quadri 69-172, dimensione del passo 1;

Tracciamento manuale alla base dell'asta visibile del portapesetti.

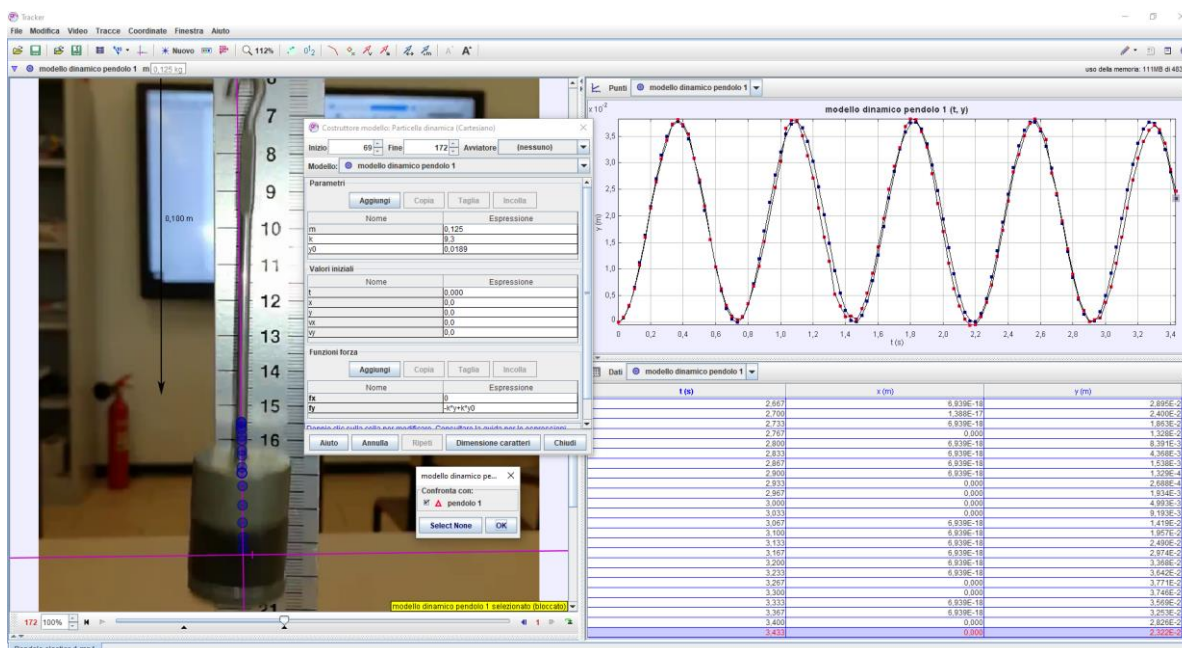


Punto per il tracciamento manuale indicato dalla freccia bianca e vista grafico y-t

b) Equazione del fit del grafico y-t: $y = 1.89 \text{ cm} \cdot \sin(8.59 t - 1.50) + 1.83 \text{ cm}$

b.1) Periodo: $T = \frac{2\pi}{B} = \frac{2\pi}{8.59} = 0.73 \text{ s}$

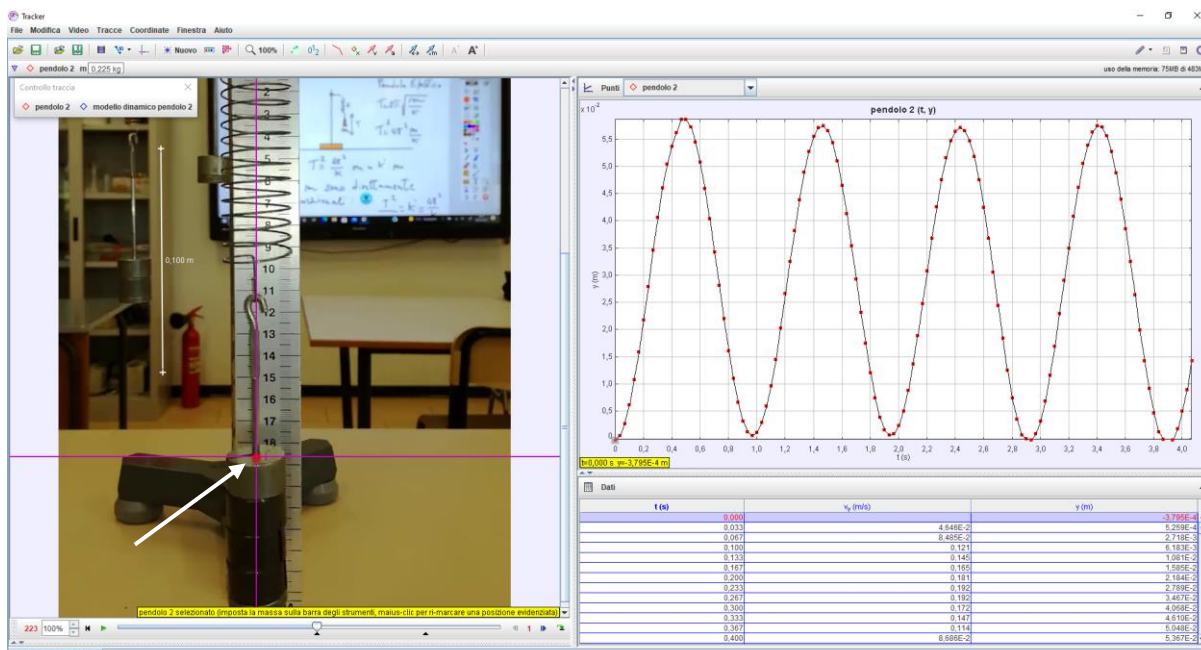
b.2) Massa oscillante: $M = \frac{kT^2}{4\pi^2} = \frac{9.3 \cdot 0.73^2}{4\pi^2} = 0.126 \text{ kg} = 126 \text{ g} = m$



La scheda dei dati del modello dinamico (parametri, valori iniziali e componenti della forza) e confronto tra la legge oraria del punto di massa e quella del modello dinamico. Nella vista principale la traiettoria simulata del punto di massa (cerchietti in blu).

2) Video: Pendolo elastico 2

Videoclip: quadri 223-345, dimensione del passo 1;
Autotracciamento alla base dell'asta visibile del portapesetti.

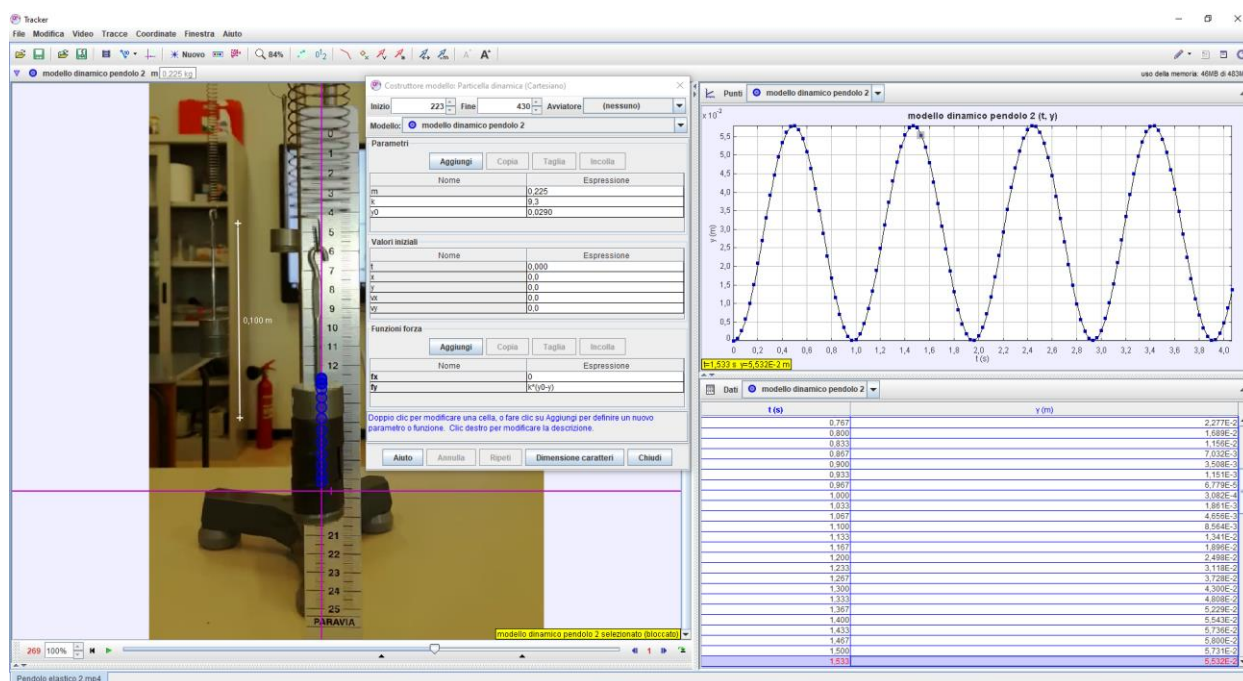


Punto per l'autotracciamento indicato dalla freccia bianca e vista grafico y-t

b) Equazione del fit del grafico y-t: $y = 2.90 \text{ cm} \cdot \sin(6.44 t + 4.75) + 2.88 \text{ cm}$

b.1) Periodo: $T = \frac{2\pi}{B} = \frac{2\pi}{6.44} = 0.98 \text{ s}$

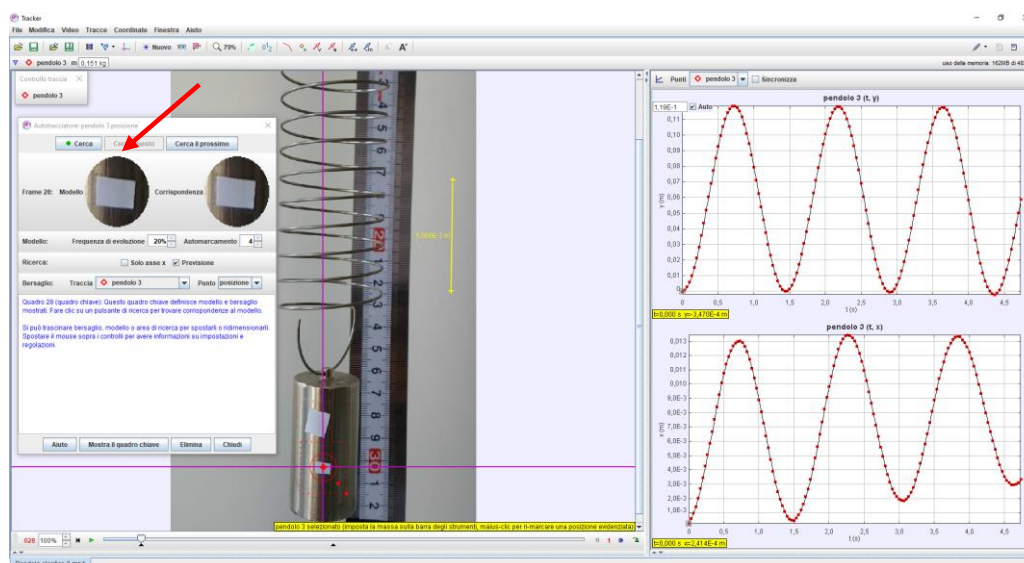
b.2) Massa oscillante: $M = \frac{kT^2}{4\pi^2} = \frac{9.3 \cdot 0.98^2}{4\pi^2} = 0.226 \text{ kg} = 226 \text{ g} = m$



La legge oraria del modello dinamico con la scheda dei dati (parametri, valori iniziali e componenti della forza). Nella vista principale la traiettoria simulata del punto di massa (cerchietti in blu)

3) Video: Pendolo elastico 3

Videoclip: quadri 72-170, dimensione del passo 1;
Autotracciamento sul quadretto bianco più piccolo di nastro adesivo fissato sul cilindro.

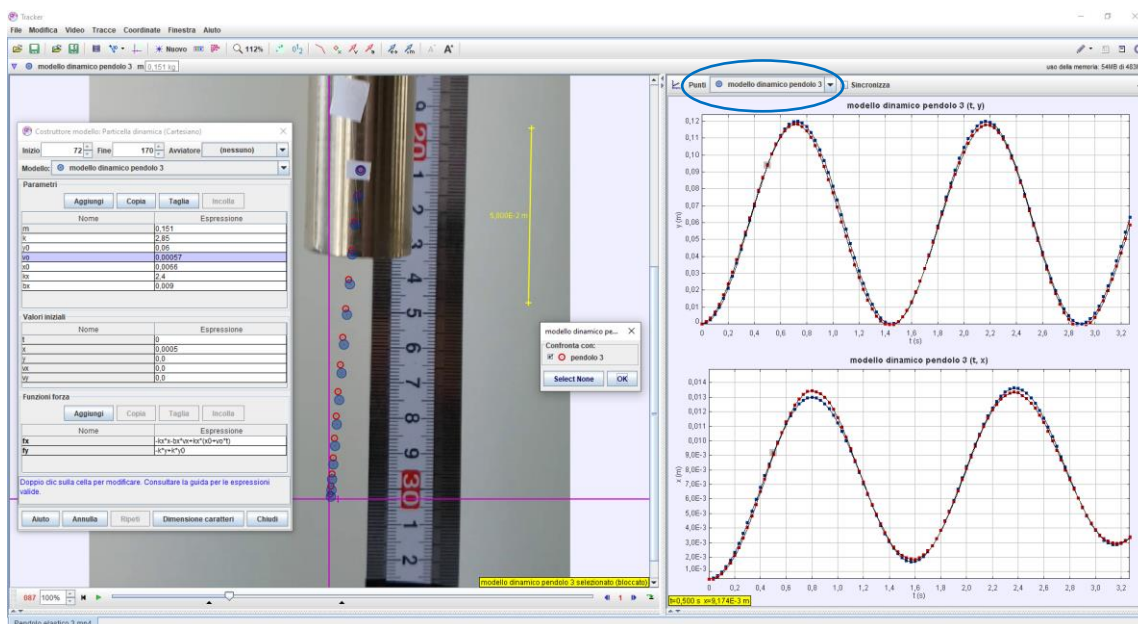


Il modello indicato dalla freccia rossa e la sua corrispondenza per l'autotracciamento. Nella vista grafici gli andamenti $x-t$ e $y-t$. In questo caso il moto oscillatorio del punto di massa avviene nel piano, con la componente x che oscilla in modo smorzato attorno ad un centro x_0 che trasla nel verso positivo, mentre la componente y è rigorosamente armonica.

b) Equazione del fit del grafico $y-t$: $y = 6.00 \text{ cm} \cdot \sin(4.32 t - 1.57) + 5.83 \text{ cm}$

b.1) Periodo:
$$T = \frac{2\pi}{B} = \frac{2\pi}{4.32} = 1.45 \text{ s}$$

b.2) Massa oscillante:
$$M = \frac{kT^2}{4\pi^2} = \frac{2.8 \cdot 1.45^2}{4\pi^2} = 0.149 \text{ kg} = 149 \text{ g} = m$$



Nella vista principale la traiettoria del punto di massa prevista dal modello dinamico (cerchietti blu) a confronto con quella ottenuta con il tracciamento automatico (cerchietti rossi). Nella vista grafici, il grafico $y-t$ è sinusoidale e si sovrappone perfettamente a quello del modello di forza f_y , mentre il grafico $x-t$ e quello del modello di forza f_x sono compatibili tra loro con una lieve differenza solamente nella zona del picco.

Esercitazione 7 – Rimbalzi di una pallina di gomma

Scopo

Analizzare i primi due rimbalzi di una pallina di gomma che urta una superficie orizzontale. Andamento nel tempo dell'energia cinetica e calcolo della percentuale di energia dissipata nell'urto.

Premessa alla prova

Il video mostra una pallina che viene lasciata cadere liberamente sopra la superficie piana e orizzontale di un tavolo in modalità di registrazione slow motion a 500 fps (Figura 1).

Si tratta di analizzare i primi due rimbalzi osservati e di misurare le altezze massime che la pallina raggiunge dopo gli urti per quantificare la loro anelasticità.

Il rapporto tra la velocità v_f che la palla possiede subito dopo l'urto e quella v_i che ha immediatamente prima dell'urto caratterizza la perdita di energia meccanica durante l'urto anelastico con il tavolo.

Tale rapporto è noto come *coefficiente di restituzione* e normalmente viene indicato con il simbolo e .

Nel caso di una pallina di massa m in caduta libera da una altezza iniziale h_i che dopo l'urto con un tavolo orizzontale raggiunge l'altezza massima finale h_f , applicando il principio di conservazione dell'energia meccanica prima nella fase di discesa e poi nella fase di risalita, si ottiene

$$e^2 = \frac{v_f^2}{v_i^2} \rightarrow e = \sqrt{\frac{h_f}{h_i}}$$

La variazione relativa di energia cinetica a seguito di un urto è invece:

$$\frac{\frac{1}{2}mv_f^2}{\frac{1}{2}mv_i^2} - 1 = e^2 - 1$$

Il coefficiente di restituzione è indipendente dal numero del rimbalzo, ma dipende solo dai materiali dei corpi in collisione tra loro (la gomma della pallina e quello della superficie del tavolo)

Per la produzione del videoclip, consiglio il tracciamento manuale tra il quadro 141 (istante iniziale della caduta libera) e di scegliere come origine degli assi il punto del primo impatto della pallina sul tavolo (quadro 249) orientando l'asse y verso l'alto. L'analisi del moto può terminare subito dopo il terzo rimbalzo, p.es. con il quadro 617. L'altezza massima dopo il primo rimbalzo si ha nel quadro 349, mentre quella dopo il secondo rimbalzo al quadro 529. Suggesto di scegliere 4 come dimensione del passo.

Tenere presente che il video è slow motion per cui i valori dell'energia cinetica calcolati da Tracker vanno moltiplicati per 400. Infatti, l'energia cinetica è direttamente proporzionale al quadrato della velocità reale che è 20 volte quella calcolata.

Dati per l'esercitazione

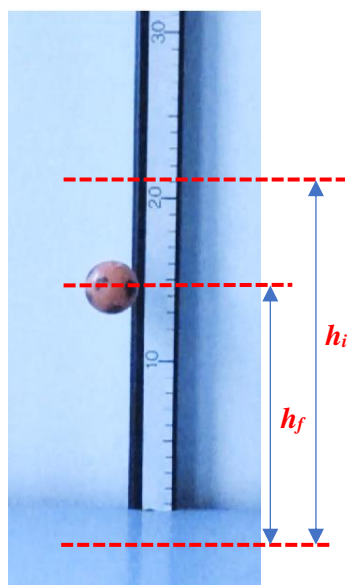


Figura 1

- Massa pallina di gomma: 13.4 g

Frequenza di registrazione: 500 fps

Frequenza di riproduzione: 25 fps

Tipologia del videoclip: **slow motion**

Attività proposta

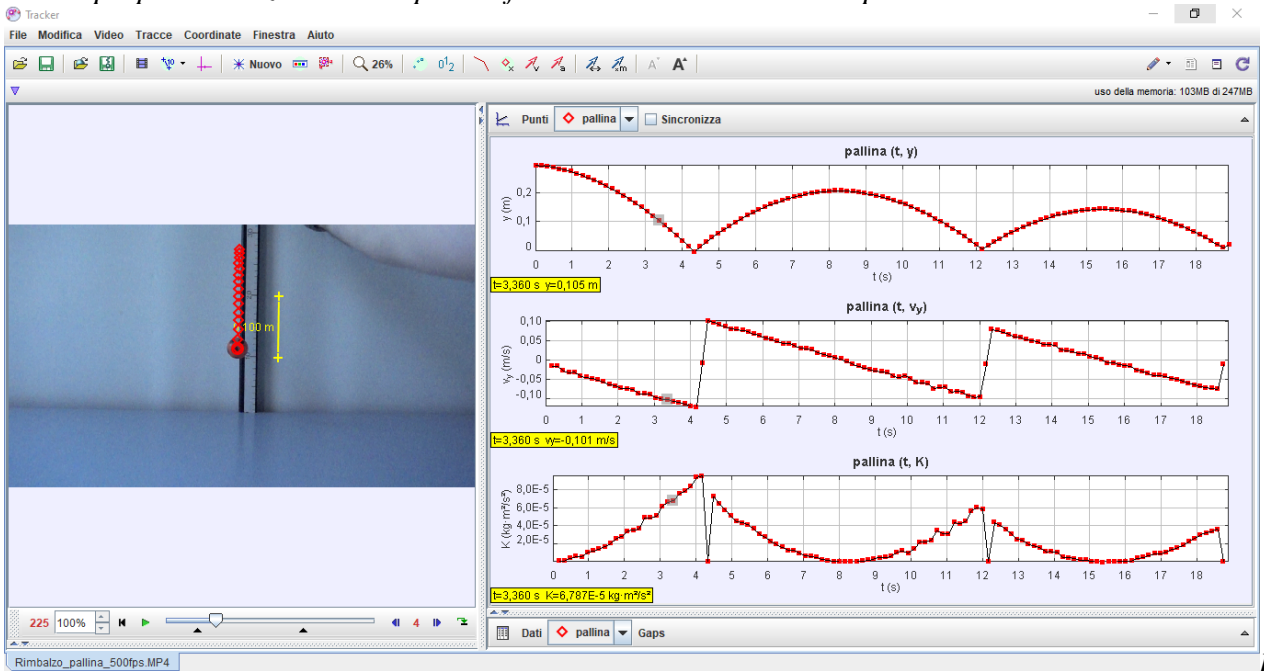
Importare il video “*Rimbalzi di una pallina di gomma*” presente nella cartella di lavoro ed utilizzando le funzioni del player di Tracker generare un videoclip nel quale:

- Determinare i grafici in funzione del tempo della posizione $y-t$, della velocità v_y-t e dell'energia cinetica $k-t$ della pallina lungo la direzione y verticale, ed interpretarli in relazione al moto osservato;
- Utilizzando i grafici della posizione, mediante l'analisi dei dati individuare i valori di h_i e h_f , e calcolare sia il coefficiente di restituzione che la perdita percentuale di energia cinetica nei due rimbalzi;
- Verificare che i due valori trovati sono identici nei due rimbalzi nel limite delle incertezze sperimentali;
- Esportare il lavoro svolto in un file *.trk ed i dati tabulati in un file *.xls

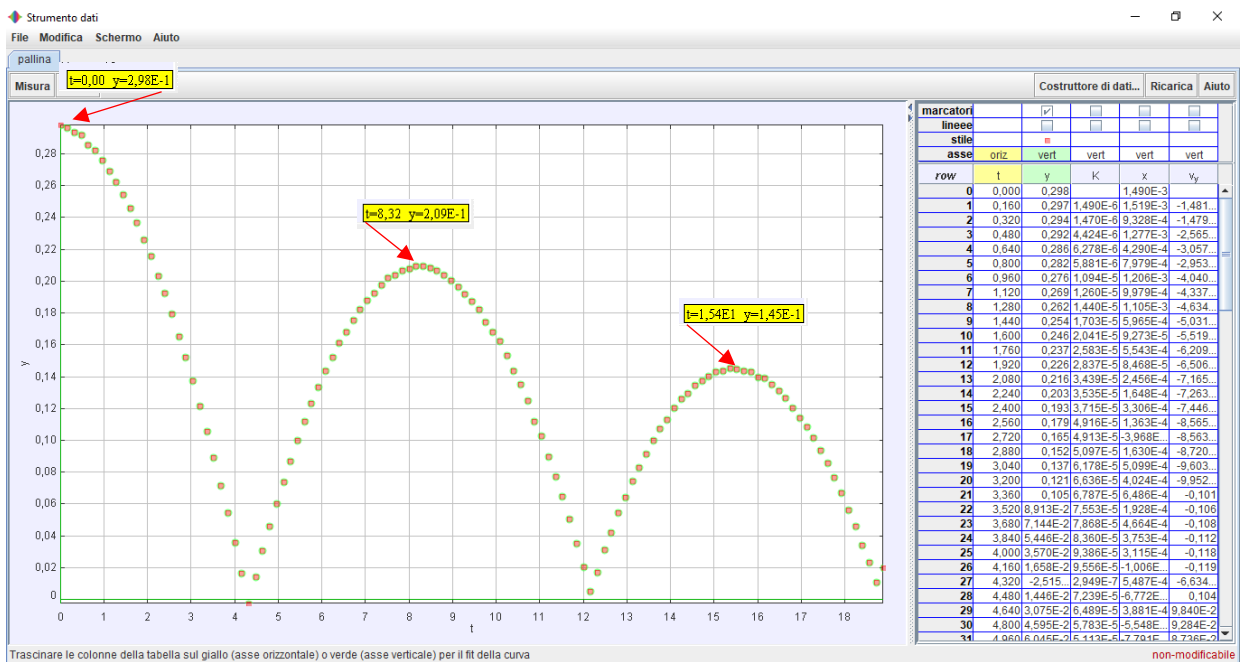
Esempio di elaborazione

Video: Rimbalzi di una pallina di gomma

videoclip: quadro iniziale 141 - quadro finale 617 - dimensione del passo 4



Grafici $y-t$, v_y-t e $k-t$



Altezza massima prima e dopo i primi due rimbalzi

1° rimbalzo

2° rimbalzo

$$e = \sqrt{\frac{2.09}{2.98}} = 0.837$$

$$e = \sqrt{\frac{1.45}{2.09}} = 0.833$$

$$e^2 - 1 = (0.837)^2 - 1 = -29.9\% \quad e^2 - 1 = (0.833)^2 - 1 = -30.6\%$$

Appendice

Conversione dei tempi, della velocità e dell'accelerazione

Conversione delle grandezze cinematiche

Il pedice T indica il valore calcolato da Tracker (riproduzione a 25 fps)		slow motion	
		250 fps	500 fps
Valori reali			
Intervallo Δt	(s)	$(1/10)\Delta t_T$	$(1/20)\Delta t_T$
Velocità v	(ms^{-1})	$10 v_T$	$20 v_T$
Accelerazione a	(ms^{-2})	$100 a_T$	$400 a_T$

Esempio a 500 fps:

$$a_T = \frac{\Delta s}{\Delta t_T^2} = \frac{\Delta s}{(20\Delta t)^2} = \frac{\Delta s}{400(\Delta t)^2} = \frac{a}{400} \quad a = 400 a_T$$

Ringraziamenti

Tutti i video di tipo "slow motion" ed il video "Pendolo elastico 3" sono stati gentilmente messi a disposizione dei corsisti dal prof. Stefano Decarlo del Dipartimento FIM di Modena.

