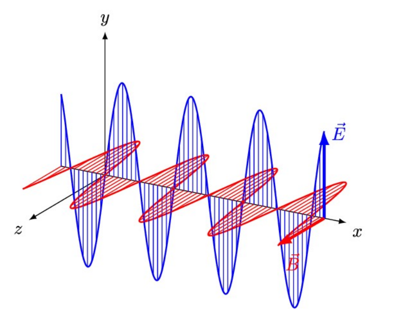
Introduzione alle Onde Elettromagnetiche



Incontri di Fisica Contemporanea 2023-2024

Prof. Andrea Beggi

Liceo Scientifico “A. F. Formiggini” (Sassuolo)

24/11/2023

PERCORSO DIDATTICO

- In questa presentazione analizzeremo un percorso proposto per le classi V del liceo scientifico che è stato effettivamente realizzato lo scorso anno.

ARGOMENTO: Le Equazioni di Maxwell e le Onde Elettromagnetiche

COLLOCAZIONE TEMPORALE: 21 gennaio – 23 febbraio 2023

DURATA: 14 ore (8 ore di lezione + 4 ore pausa didattica + 2 ore verifica)

TESTO IN ADOZIONE:

J. D. Cutnell et al, *La Fisica di Cutnell e Johnson (2 ed)*, Vol.3, Zanichelli

ULTERIORI TESTI (Esercizi+Teoria):

- S. Mandolini, *Le Parole della Fisica*, Vol. 3, Zanichelli (FUORI STAMPA)
- U. Amaldi, *L'Amaldi per i licei scientifici.blu*, Vol. 3, Zanichelli

CONTENUTO DELLA PRESENTAZIONE

- Una rapida carrellata dei **contenuti didattici**, con riflessione su **aspetti tecnici** della spiegazione (alcuni aspetti **interpretativi** interessanti).
- Analisi di alcune tipologie di **esercizi** particolarmente significative (utilizzate poi nella **prova di verifica**) e delle **misconcezioni** più frequenti.

Lezione 1	Campi vettoriali: definizione, linee di campo vs linee di forza, pozzi e sorgenti, linee chiuse vs linee aperte, vortici. Definizione di flusso e circuitazione di un campo (forma discreta e forma integrale) e interpretazione degli stessi in termini di forma delle linee di campo, sorgenti e vortici. Ripasso sui campi statici: Teorema di Gauss per E e sua interpretazione. Circuitazione di E e sua interpretazione in termini di lavoro e ddp. Teorema di Gauss per B e sua interpretazione. Legge di Ampère e sua interpretazione. COMPITI: Studiare accuratamente la teoria e segnarsi le domande sui concetti non chiari.
Lezione 2	Quadro di sintesi sui campi elettrostatico e magnetostatico. Campi dinamici: legge di FNL e circuitazione di E. Esercizio 4.1 sulle slides. COMPITI: Fare il punto b dell'es. 4.1 sulle slides e poi gli es. 1 e 6 a pag. 126
Lezione 3	Correzione compiti. La corrente di spostamento e il Teorema di Ampère-Maxwell. Linee del campo magnetico indotto da un campo elettrico variabile nel tempo e loro verso. COMPITI: Finire esercizio 4.2 iniziato in classe, poi fare l'es. 4 pag. 126
Lezione 4	Correzione compiti. Equazioni di Maxwell in forma standard e in forma integrale. Enunciato ed interpretazione fisico-matematica di ciascuna delle quattro equazioni (in termini di sorgenti e forma delle linee di campo). Conseguenze delle equazioni di Maxwell: scoperta delle onde e.m., unificazione di elettricità, magnetismo ed ottica. COMPITO: Studiare bene la teoria vista oggi, es. 5 pag. 126, test 1-2-3-4 pag. 140
Lezione 5	Onde elettromagnetiche: velocità di propagazione, periodo, frequenza, lunghezza d'onda. Legge dell'onda armonica piana, richiami sulle onde stazionarie e sul processo di generazione. Emissione e ricezione di onde e.m. mediante antenne e circuiti oscillanti LC. COMPITI: es. 13, 14, 23, 26, 29, 34 da pag. 128 in avanti
Lezione 6	Correzione compiti. Formule di prostaferesi in forma compatta ed euristiche mnemoniche. Spettro elettromagnetico: analisi delle varie regioni e cenni sulle applicazioni e sul filtraggio atmosferico. Legame tra frequenza ed energia dei fotoni, legame tra lunghezza d'onda e fenomeni diffrattivi (cenni). Applicazioni in astronomia (cenni). Quadro di sintesi sulle grandezze che caratterizzano un'onda e.m.: energia totale e densità di energia, quantità di moto totale e relativa densità, pressione, potenza, intensità (o irradiamento). COMPITI: es. 19, 20, 24, 33, 74 da pag. 129 in avanti
Lezione 7	Correzione compiti. Concetto di impulso o pacchetto d'onda. Frequenza e lunghezza d'onda nel vuoto e nella materia. (Densità di) energia trasportata dall'onda elettromagnetica. (Densità di) quantità di moto trasportata dall'onda. COMPITI: es. 39, 41, 42, 44, 48, 50 pag.131-32
Lezione 8	Correzione compiti. Pressione di radiazione per onde incidenti da una direzione ben precisa o diffuse: differenza tra il caso dell'assorbimento e il caso della riflessione. Applicazioni: le vele solari. Polarizzazione lineare e circolare. Polarizzazione lineare e filtro polaroid. Azione del filtro polaroid sulla luce non polarizzata. Azione del filtro polaroid sulla luce polarizzata (Legge di Malus). Polarizzazione per riflessione e angolo di Brewster. Polarizzazione per diffusione in atmosfera (cenni). COMPITI: esempio svolto 4.3 sulle slides, esercizi 49, 53 (quali dati vi mancano?), 61, 62, 67 da pag. 132 in avanti
Pausa didattica	Correzione compiti e analisi del formulario. COMPITI: Sulla "Scheda preparazione alla verifica" esercizi 1.1, 2.1, 3.1, 4.1, 5.1
Pausa didattica	Correzione compiti. COMPITI: Sulla "Scheda preparazione alla verifica" es. 1.2, 2.2, 3.2, 4.2, 5.2
Pausa didattica	Correzione compiti ed esercizi. COMPITO: Svolgere a scelta alcuni esercizi dalla sezione "ALTRI ESERCIZI PER LA VERIFICA" che trovate in didattica
Pausa didattica	Correzione compiti ed esercizi
Verifica scritta	su Equazioni di Maxwell e Onde Elettromagnetiche.

UD 4 – Le equazioni di Maxwell e le onde elettromagnetiche

Classe: V Liceo Scientifico
Docente: Andrea Beggi

Indice

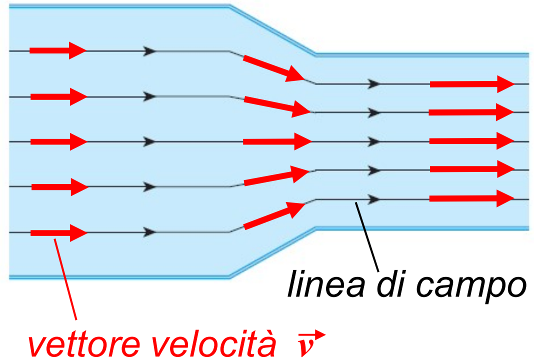
1. Richiami sui campi vettoriali e sulle operazioni di flusso e circuitazione: l'esempio dei fluidi.
2. Flusso e circuitazione del campo elettrico e magnetico in condizioni statiche.
3. La Legge di Faraday-Neumann-Lenz e la circuitazione del campo elettrico in condizioni dinamiche.
4. Il Teorema di Ampère-Maxwell e la circuitazione del campo magnetico in condizioni dinamiche.
5. Le equazioni di Maxwell e l'elettromagnetismo.

6. Le equazioni nel vuoto: le onde elettromagnetiche
7. Lo spettro elettromagnetico
8. Energia, quantità di moto e pressione di un'onda elettromagnetica
9. Polarizzazione di un'onda elettromagnetica

Campi vettoriali e linee di campo

Un **campo vettoriale** è una funzione che ad ogni **punto** di una regione di spazio associa un **vettore**.

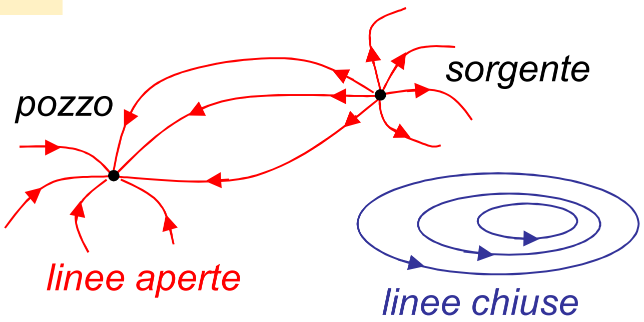
- Esso descrive dunque una grandezza vettoriale il cui valore dipende dalla posizione nello spazio in cui ci troviamo.
- Un campo vettoriale si dice **uniforme** se è **costante nello spazio**.
- Un campo vettoriale si dice **statico** se è **costante nel tempo**. Viceversa, si dice **dinamico**.



Un esempio di campo vettoriale è dato dal campo delle velocità di un fluido, che descrive in ogni punto la velocità posseduta da una particella del fluido stesso.

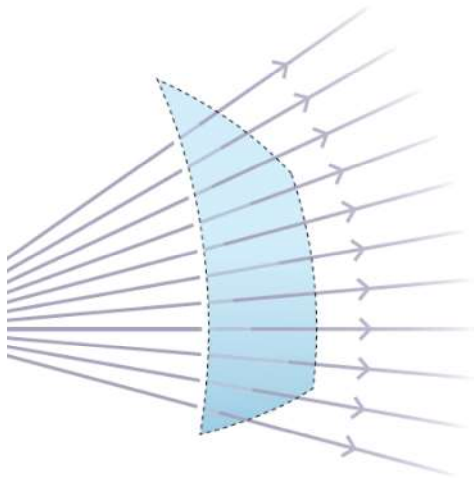
Le **linee di campo** sono linee che sono in ogni punto dello spazio **tangenti (=parallele)** al vettore campo in quel punto.

- Se il campo vettoriale è una forza, le linee vengono anche dette **linee di forza**.
- Il **verso** della linea è lo stesso del campo.
- Dove le linee sono **più fitte**, il campo è **più intenso**.

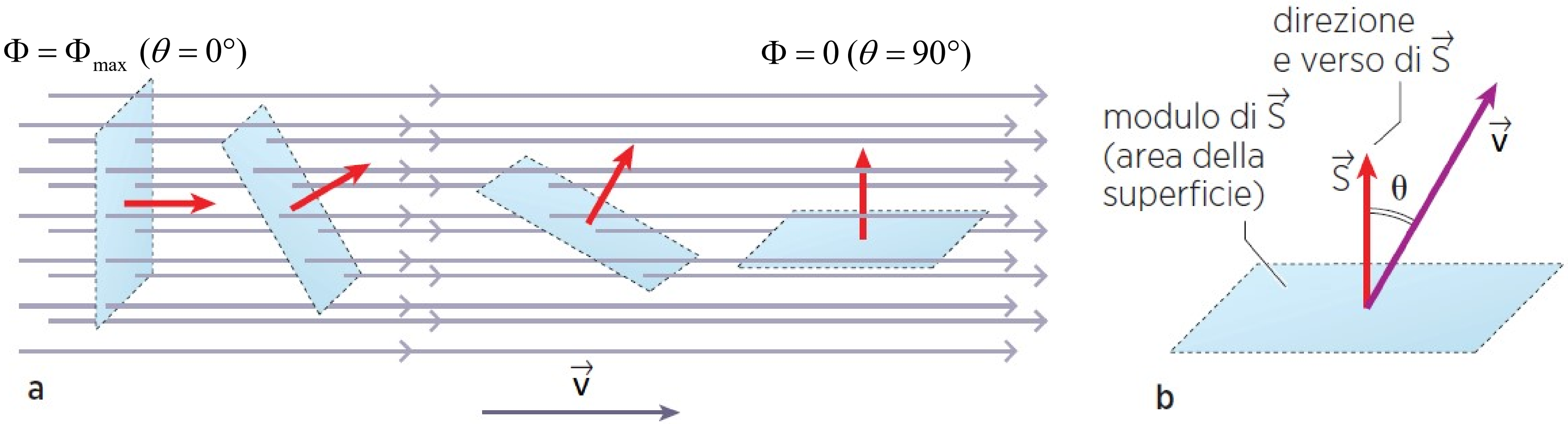


Flusso di un campo vettoriale (1)

- Il flusso è una grandezza che calcola il **numero di linee del campo** $\vec{v}$ che attraversano una **superficie** S.
- È definito per **superfici piane** su cui il **campo** è **costante**: detto $\vec{S}$ il vettore perpendicolare alla superficie e avente modulo pari alla misura di S, si definisce **flusso di** $\vec{v}$ **attraverso** S la quantità:



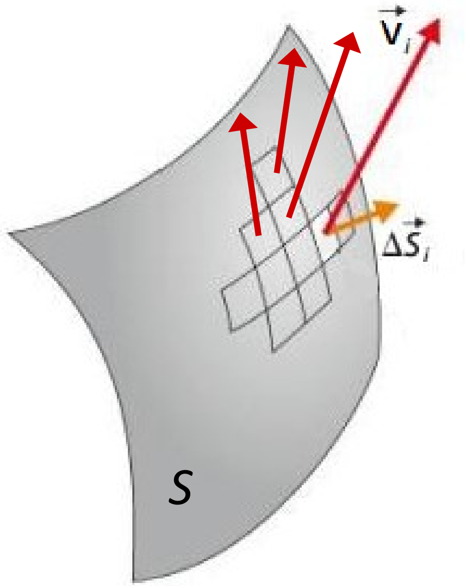
$$\Phi_S(\vec{v}) = \vec{v} \cdot \vec{S} = v_\perp \cdot S = v \cdot S \cdot \cos\theta$$



Flusso di un campo vettoriale (2)

- Per **superfici non piane** e/o **campi variabili**, si "spezzetta" S in tanti elementi infinitesimi ΔS_i circa piani su cui il campo $\vec{v}_i$ è circa costante: il flusso è così dato dalla somma dei flussi elementari $\Delta\Phi$ attraverso ciascuna superficie ΔS_i.

$$\Phi_S(\vec{v}) = \lim_{\Delta S \to 0} \sum_i \Delta\Phi_i = \lim_{\Delta S \to 0} \sum_i \vec{v}_i \cdot \Delta\vec{S}_i = \int_S \vec{v} \cdot d\vec{S}$$



- Nel limite in cui $\Delta S \to 0$ l'operazione di sommatoria diviene un **integrale definito,** ossia una sorta di "somma continua" su S**.** (NB: l'operazione inversa della derivata).
- Per le superfici piane il verso del vettore S è arbitrario. Per le superfici chiuse si sceglie convenzionalmente per S il verso uscente.

- Il flusso attraverso una **superficie chiusa** è **diverso da zero** solo se la superficie contiene **sorgenti/pozzi del campo**, che determinano un eccesso netto di **linee di campo uscenti/entranti.**

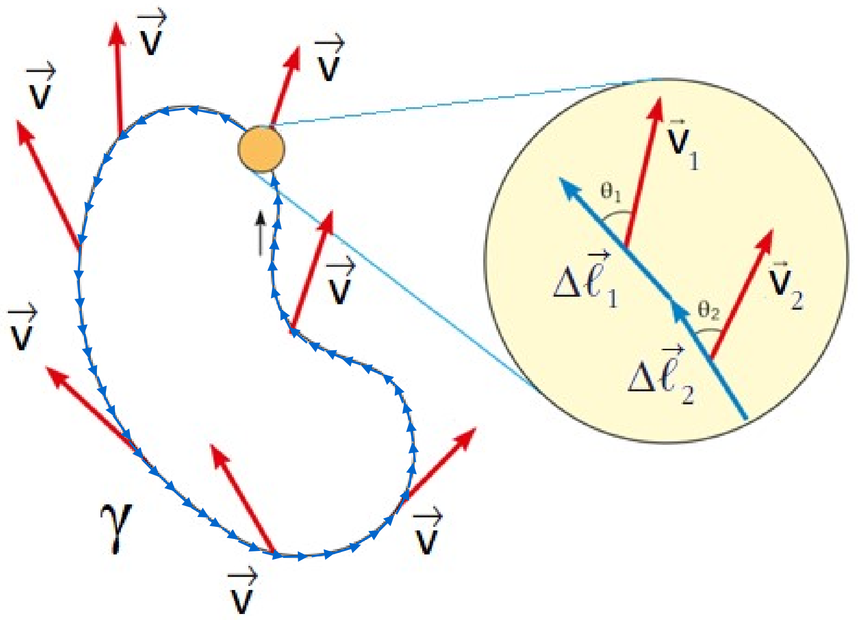
Circuitazione di un campo vettoriale (1)

- Data una **curva chiusa** e **orientata** γ, la suddividiamo in una serie di **segmenti infinitesimi** $\Delta\vec{\ell}$ considerabili sostanzialmente come **rettilinei**. Se sono sufficientemente piccoli, il **campo vettoriale** $\boldsymbol{v}$ può considerarsi **costante** su ciascun $\Delta\vec{\ell}$.
- Definiamo **circuitazione del campo vettoriale** $\boldsymbol{v}$ **lungo la curva orientata** γ la somma dei prodotti scalari $\vec{v}\cdot\Delta\vec{\ell}$ calcolati lungo γ:

$$\Gamma_\gamma(\vec{v}) = \lim_{\Delta\ell\to 0}\sum_i \vec{v}_i\cdot\Delta\vec{\ell}_i = \int_\gamma \vec{v}\cdot d\vec{\ell}$$

con $\vec{v}_i\cdot\Delta\vec{\ell}_i = v_i\cdot\Delta\ell_i\cos\theta_i$

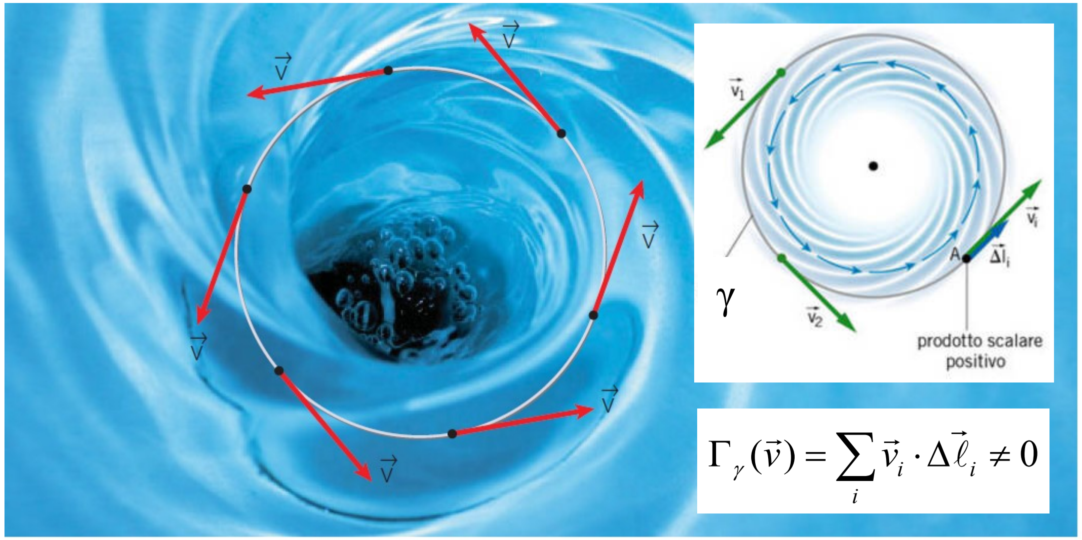
- Anche la circuitazione è matematicamente descritta da un integrale definito (cioè una "somma continua" di contributi infinitesimi).



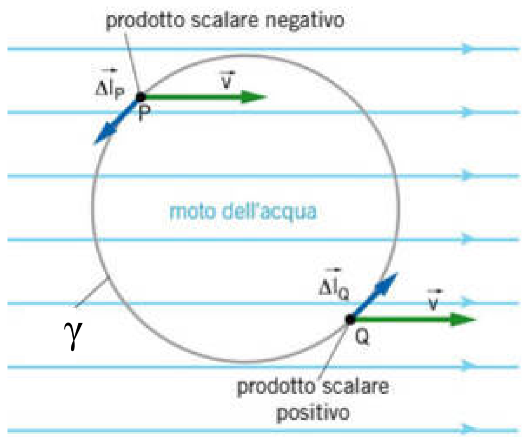
Circuitazione di un campo vettoriale (2)

- Un campo con circuitazione **nulla** è detto **conservativo**.
- La circuitazione del campo v su γ è **diversa da zero** solo se all'interno del percorso chiuso γ è contenuto un **vortice**, ossia una regione circondata da **linee di campo chiuse** (o **spiraliformi**).

- Ciò è evidente nel moto dei fluidi: data la particolare forma delle linee di campo attorno al vortice, i contributi $\vec{v} \cdot \Delta\vec{\ell}$ hanno tutti lo stesso segno e si sommano tra loro; in presenza di linee di campo aperte, invece, la circuitazione somma contributi di segno opposto che si cancellano a vicenda.



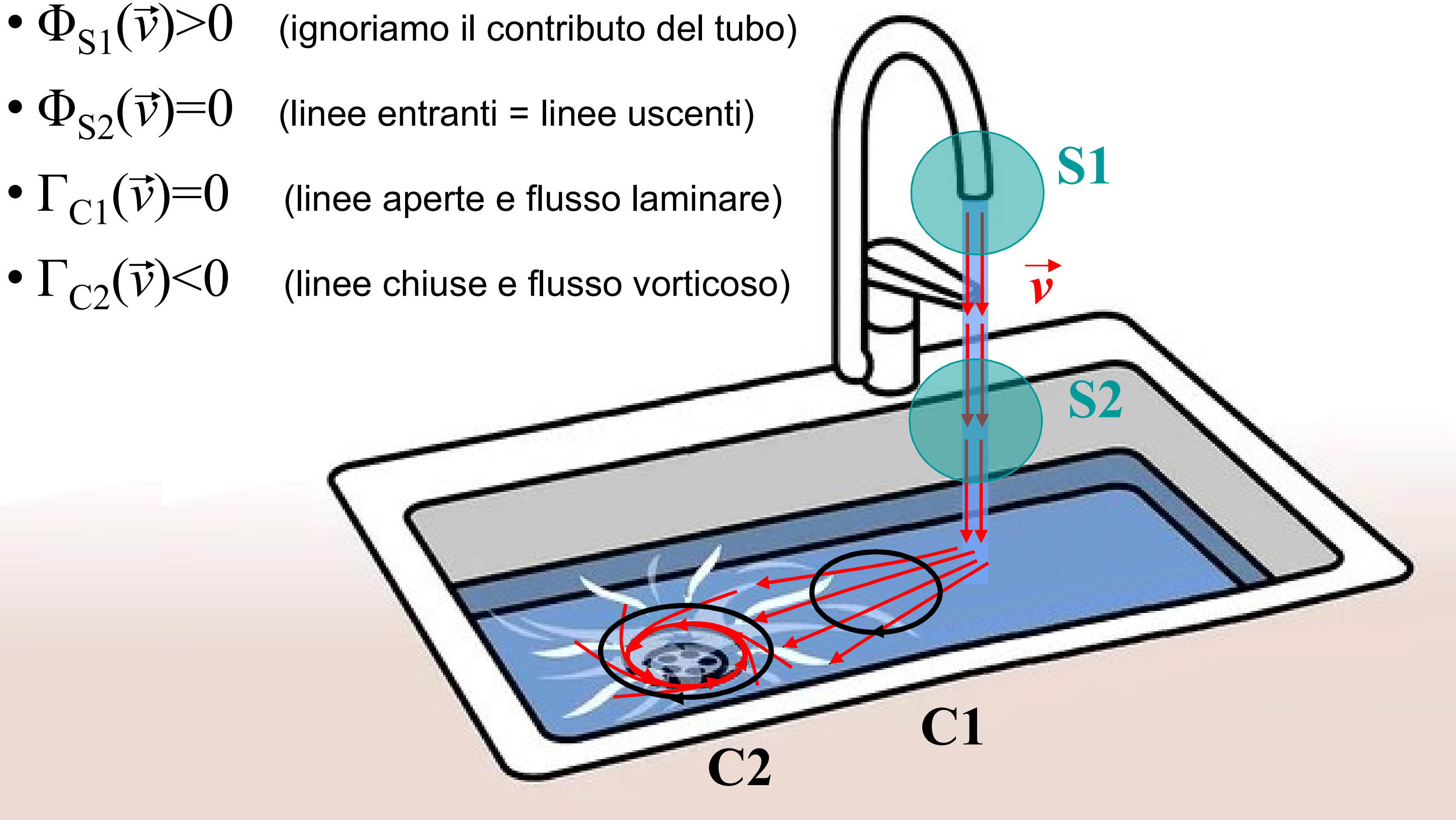
$$\Gamma_\gamma(\vec{v}) = \sum_i \vec{v}_i \cdot \Delta\vec{\ell}_i = 0$$

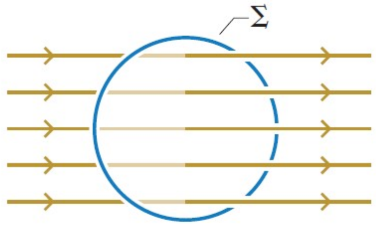
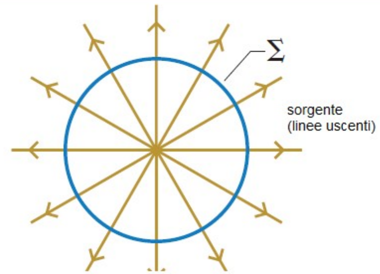
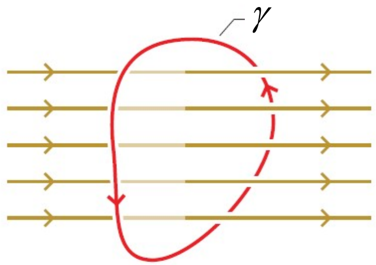
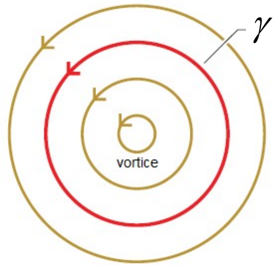


Esempio sui fluidi

Osservando il disegno è possibile dire che:

- $\Phi_{S1}(\vec{v})>0$ (ignoriamo il contributo del tubo)
- $\Phi_{S2}(\vec{v})=0$ (linee entranti = linee uscenti)
- $\Gamma_{C1}(\vec{v})=0$ (linee aperte e flusso laminare)
- $\Gamma_{C2}(\vec{v})<0$ (linee chiuse e flusso vorticoso)



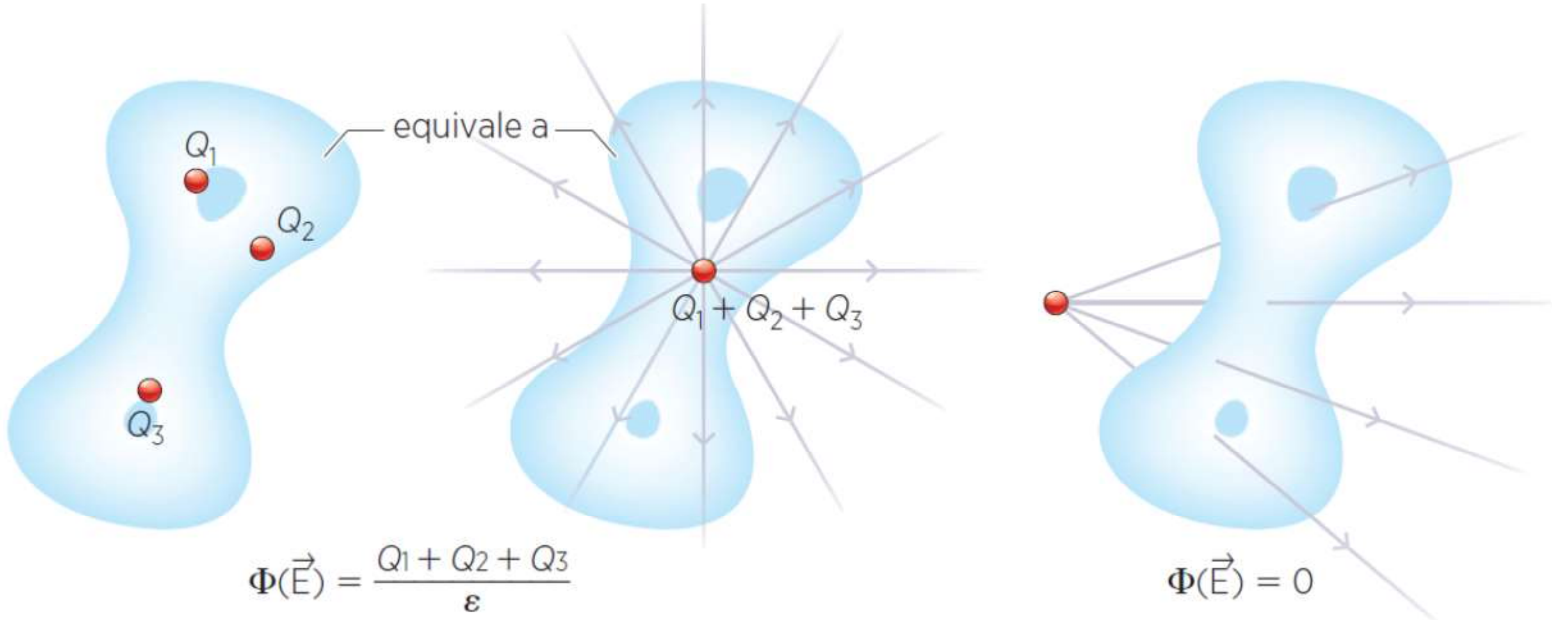
OPERAZIONI IN UN CAMPO VETTORIALE	FORMULA	CASO	SIGNIFICATO	LINEE DEL CAMPO
Flusso del campo $\vec{v}$ attraverso una superficie chiusa Σ	$\Phi_\Sigma = \sum \vec{v}_i \cdot \Delta \vec{S}_i$	$\Phi_\Sigma = 0$	Dentro Σ non ci sono sorgenti o pozzi del campo	
		$\Phi_\Sigma \neq 0$	Dentro Σ sono presenti sorgenti o pozzi del campo	
Circuitazione del campo $\vec{v}$ lungo un percorso chiuso γ	$\Gamma_\gamma = \sum_i (\vec{v}_i \cdot \Delta \vec{\ell}_i)$	$\Gamma_\gamma = 0$	Lungo γ non ci sono vortici del campo	
		$\Gamma_\gamma \neq 0$	Lungo γ ci sono vortici del campo	

Flusso del campo elettrostatico: Il Teorema di Gauss per E

Il **flusso del campo elettrico** attraverso una qualsiasi **superficie chiusa** è **direttamente proporzionale alla carica totale** in essa contenuta:

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{E}) = \sum_i \vec{E} \cdot \Delta\vec{S}_i = \frac{Q_{tot}}{\varepsilon}$$

Il teorema ci dice che le **sorgenti** del campo elettrico sono **puntiformi** (infatti sono le **cariche elettriche**) e che le sue **linee** sono **aperte**.



Circuitazione del campo elettrostatico: Conservatività di E

La **circuitazione del campo elettrostatico** lungo una qualsiasi **linea chiusa** è **sempre nulla** (cioè è un campo conservativo)

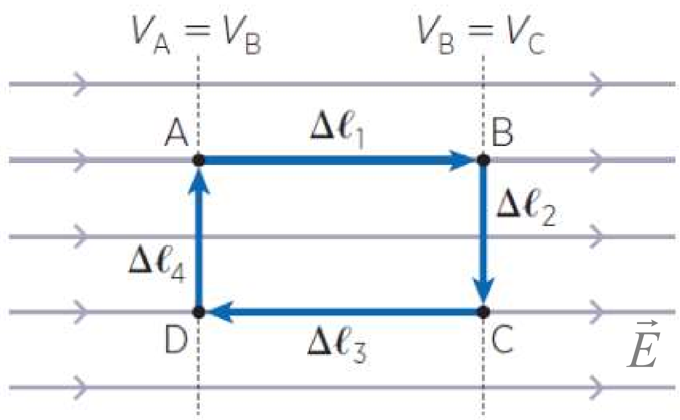
$$\Gamma_\gamma(\vec{E}) = \sum_i \vec{E} \cdot \Delta\vec{\ell}_i = 0$$

- È possibile dimostrarlo ricordando che:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \quad \Rightarrow \quad \Gamma_\gamma(\vec{E}) = \sum_i \frac{\vec{F}}{q} \cdot \Delta\vec{\ell}_i$$

- Raccogliamo q e portiamola fuori dalla sommatoria:

$$\Gamma_\gamma(\vec{E}) = \frac{1}{q}\sum_i \vec{F} \cdot \Delta\vec{\ell}_i = \frac{1}{q}\sum_i L_i = \frac{L_{tot}}{q} = \Delta V_{tot} = 0$$



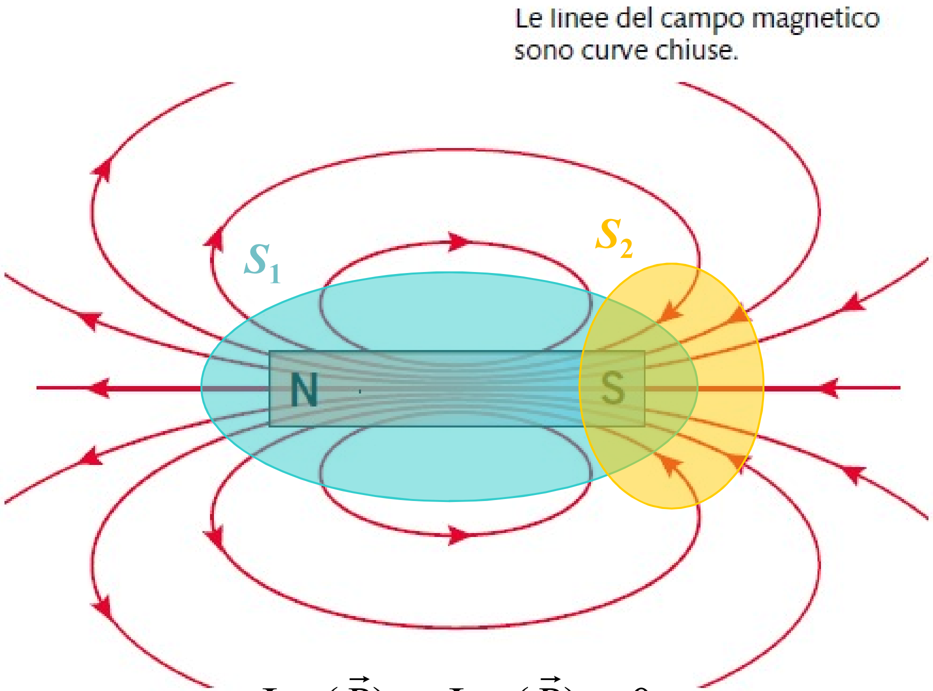
DDP accumulata facendo "un giro" del circuito

- La circuitazione risulta allora proporzionale al **lavoro totale** compiuto dalla **forza di Coulomb** $\vec{F}$ lungo la curva chiusa γ, che è zero perché si tratta di una **forza conservativa** (che il campo sia uniforme o meno non importa).
- **ATTENZIONE**: Il discorso funziona solo per il **campo elettrostatico** e non per campi **variabili nel tempo**, come vedremo nel seguito.

Flusso del campo magnetostatico: Il Teorema di Gauss per B

Il **flusso del campo magnetico** attraverso una qualsiasi **superficie chiusa** (anche detta *superficie gaussiana*) è **sempre nullo**:

$$\Phi_S(\vec{B}) = 0$$



$$\Phi_{S_1}(\vec{B}) = \Phi_{S_2}(\vec{B}) = 0$$

Le linee del campo magnetico, infatti, proseguono sempre dentro al magnete, chiudendosi ad **anello**. Di conseguenza, per ogni superficie chiusa, **tante linee entrano** quante ne **escono**, ed il flusso risulta **nullo** (il campo si dice **"solenoidale"**).

Questo implica che **non esistano monopoli magnetici**: dunque una superficie chiusa racchiude sempre un numero uguale di «poli nord» e «poli sud».

Circuitazione del campo magnetostatico: Il Teorema di Ampère

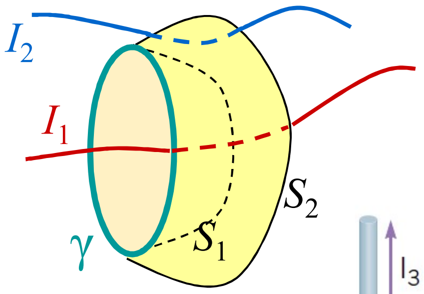
Teorema di Ampère
La circuitazione del **campo magnetico** lungo una **curva chiusa** γ qualsiasi è direttamente proporzionale alla **somma algebrica delle correnti concatenate** con γ:

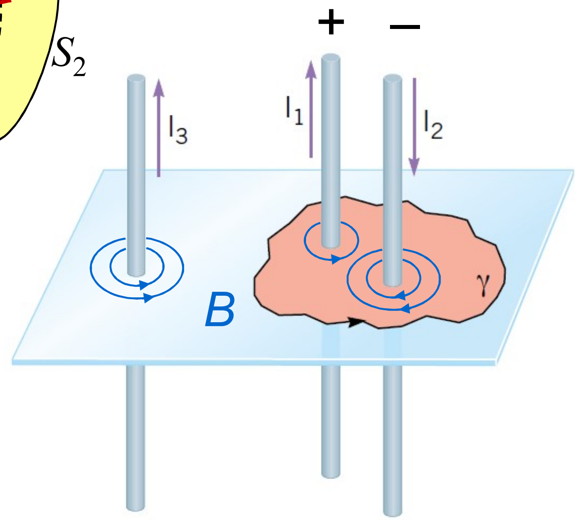
$$\Gamma_\gamma(\vec{B}) = \mu_0 \sum_j I_j$$

Una corrente si dice **concatenata** a una curva γ quando <u>attraversa ogni superficie che ha come contorno la curva</u> γ.

Le correnti concatenate I_j sono prese con il segno positivo se generano su γ un campo magnetico con lo stesso verso con cui è percorsa γ, negativo nel caso opposto (NB: regola mano dx).

Se $\Gamma \neq 0$, allora le linee di campo di B sono **chiuse ad anello** attorno alle correnti (e ci sono vortici in γ).





Sintesi: Equazioni dei campi elettrostatico e magnetostatico

- *Campo elettrostatico* $\vec{E}$

Teorema di Gauss $$\Phi_S(\vec{E}) = \frac{Q_T}{\varepsilon_0}$$

Conservatività del campo $$\Gamma_\gamma(\vec{E}) = 0$$

- *Campo magnetostatico* $\vec{B}$

Teorema di Gauss $$\Phi_S(\vec{B}) = 0$$

Teorema di Ampère $$\Gamma_\gamma(\vec{B}) = \mu_0 \sum_j I_j$$

Campi che variano nel tempo

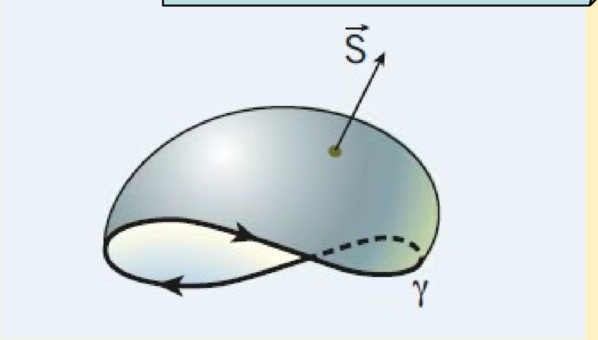
Osserviamo che la **Legge di Faraday-Neumann-Lenz (FNL)** permette di calcolare la **fem indotta** in un **circuito chiuso** γ, ossia la differenza di potenziale ΔV_{tot} che si "accumula" percorrendo un giro completo:

$$\mathcal{E}_{ind} = \Delta V_{tot} = \sum_i \vec{E} \cdot \Delta \vec{\ell}_i = \Gamma_\gamma(\vec{E})$$ **(per quanto abbiamo visto sulla circuitazione di E)**

Pertanto la **legge di FNL** può essere riscritta come:

$$\Gamma_\gamma(\vec{E}) = -\frac{\Delta\Phi(\vec{B})}{\Delta t}$$

Il **verso** della **superficie S** attraverso cui flussa B e il verso della **curva** γ su cui circuito E **non sono arbitrari** ma sono legati dalla **regola della mano destra**



Tale formula esprime il fatto che un **campo elettrico** può essere generato non solo da **cariche** ma anche da una **variazione del campo magnetico.**

La circuitazione del campo elettrico indotto è diversa da zero: quindi **il campo elettrico indotto non è un campo conservativo.**

Conseguenze della legge di FNL

$$f_{em} = -\frac{\Delta\Phi(\vec{B})}{\Delta t} = \Gamma(\vec{E}) \quad \rightarrow \quad f_{em} = -\frac{\mathrm{d}\Phi(\vec{B})}{\mathrm{d}t} = \Gamma(\vec{E})$$

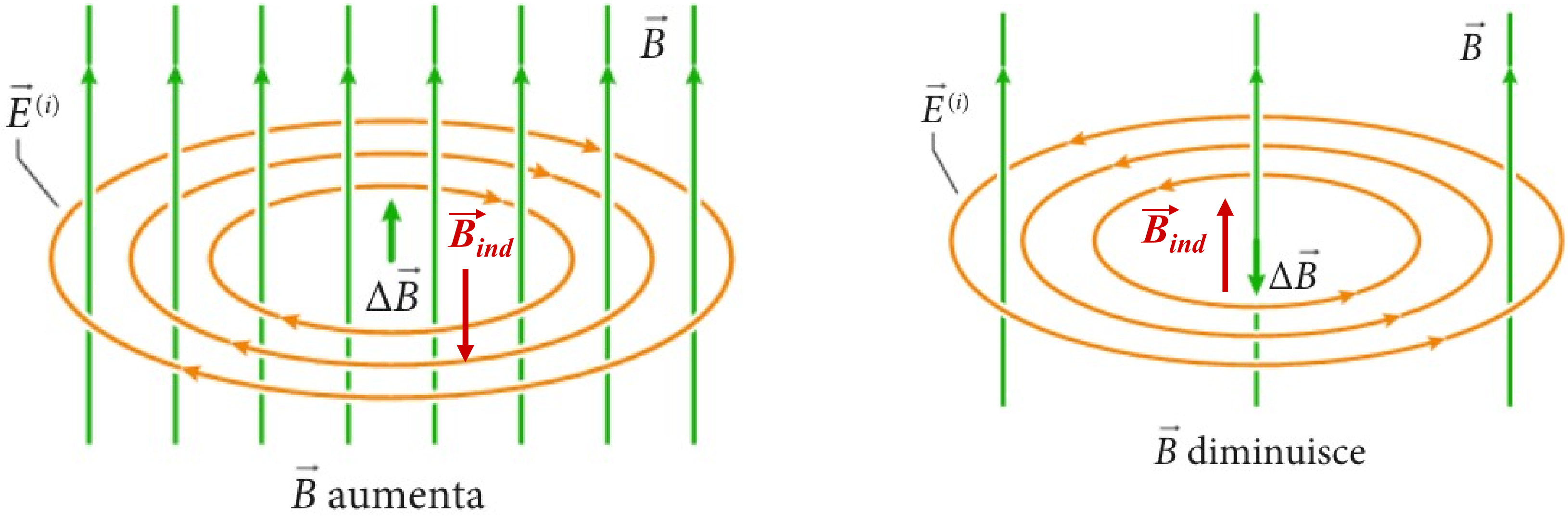
Un campo magnetico variabile dà origine a un campo elettrico indotto.

Di conseguenza, un campo elettrico può essere generato da:

- Cariche elettriche $\Rightarrow$ campo elettrostatico, *conservativo* ($\Gamma(E)=0$)
- Campi magnetici variabili $\Rightarrow$ campo elettrico indotto, *non conservativo* ($\Gamma(E)\neq 0$)

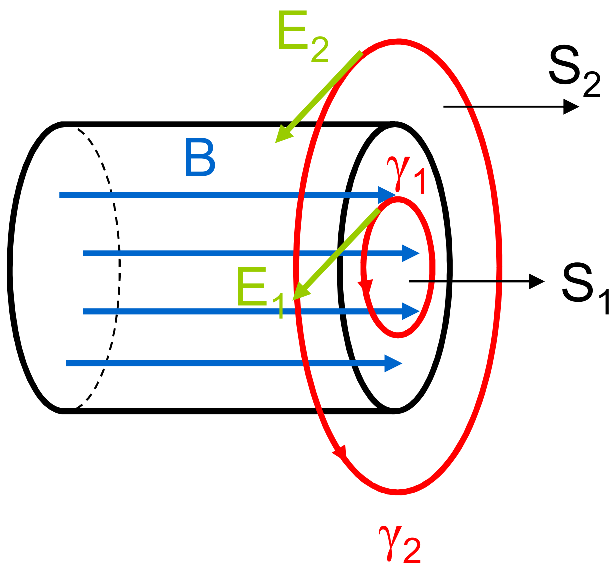
Caratteristiche del campo elettrico indotto

Le sue **linee** sono **chiuse** e non nascono né terminano dalle cariche, perché la loro origine è dovuta alla variazione di un campo magnetico. Il campo elettrico indotto da un solenoide è così raffigurato:



Per determinare il **verso** delle linee di E indotto basta ricordare che sono **avvolte attorno** alle linee del **campo magnetico indotto** B_{ind} secondo la **regola della mano destra** (è lo **stesso verso** di I_{ind}).

Esempio 4.1



Un campo magnetico uniforme di valore iniziale 2,00 T occupa una regione cilindrica di raggio R=30 cm, con direzione parallela all'asse del cilindro (fuori da esso B=0).

a) Se il campo B va a zero in un tempo Δt=3s, determina il campo elettrico indotto E alla distanza r_1=10 cm e r_2=40 cm dall'asse del cilindro.

b) Rispondi alla stessa domanda ipotizzando che il campo evolva nel tempo con legge $B(t)=B_0e^{-kt}$.

Soluzioni:

a) $$E_1 = +\frac{B\cdot r_1}{2\cdot\Delta t} \qquad E_2 = +\frac{B\cdot R^2}{2\cdot r_2\cdot\Delta t} \qquad \Gamma_\gamma(\vec{E}) = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

b) $$E_1 = +\frac{1}{2}kB_0e^{-kt}r_1 \qquad E_2 = +\frac{1}{2r_2}kB_0e^{-kt}R^2 \qquad \Gamma_\gamma(\vec{E}) = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Esempio 4.1

Svolgimento a (traccia):

Ipotizzo E_1 equiverso a γ_1: se non è così, alla fine dei conti otterrò $E_1<0$.

Mi aspetto che, per ragioni di simmetria, su γ_1 il campo E_1 sia uniforme.

$$\Gamma_{\gamma 1}(\vec{E}_1) = E_1 \cdot 2\pi r_1 \qquad \Phi_{S1}(B) = B \cdot \pi r_1^2 \qquad E_1 \cdot 2\pi r_1 = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = +\frac{B \cdot \pi r_1^2}{\Delta t}$$

$$\Gamma_{\gamma 2}(\vec{E}_2) = E_2 \cdot 2\pi r_2 \qquad \Phi_{S2}(B) = \Phi_S(B) = B \cdot \pi R^2 \qquad E_2 \cdot 2\pi r_2 = +\frac{B \cdot \pi R^2}{\Delta t}$$

Attenzione: il flusso di B attraverso S_2 coincide col flusso attraverso $S=\pi R^2$, perché fuori da tale area B è nullo.

Svolgimento b (traccia):

$$\Phi_{S1}(B) = B(t) \cdot \pi r_1^2 = B_0 e^{-kt} \cdot \pi r_1^2 \qquad E_1 \cdot 2\pi r_1 = -\frac{d\Phi}{dt} = +kB_0 e^{-kt} \pi r_1^2$$

$$\Phi_{S2}(B) = B(t) \cdot \pi R^2 = B_0 e^{-kt} \cdot \pi R^2 \qquad E_2 \cdot 2\pi r_2 = -\frac{d\Phi}{dt} = +kB_0 e^{-kt} \pi R^2$$

Esempio 4.1

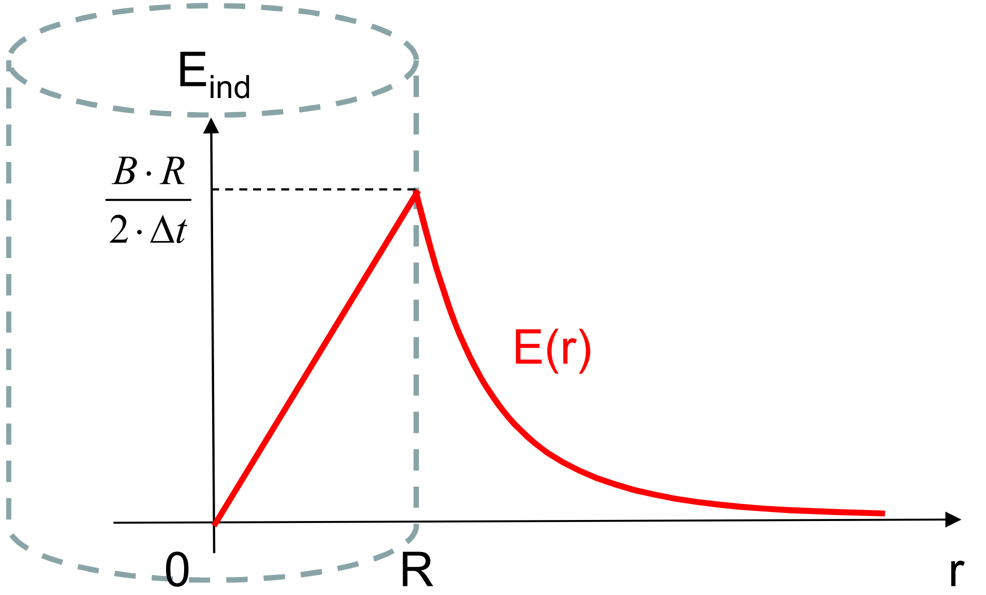
Svolgimento a: Grafico di E(r)

Il campo indotto allora sarà:

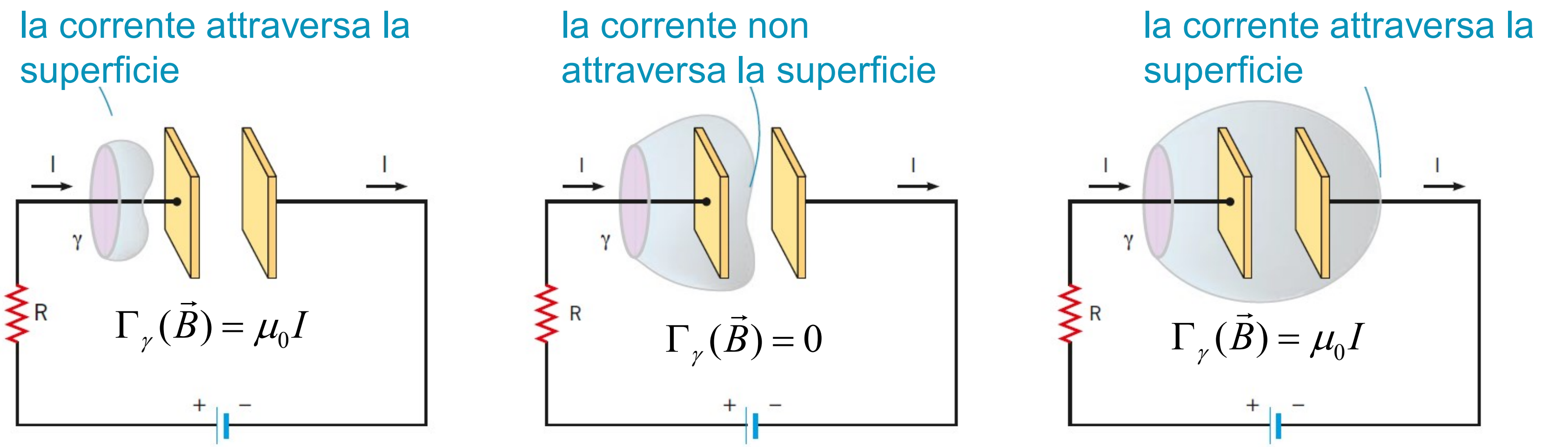
$$E_1 = +\frac{B \cdot r_1}{2 \cdot \Delta t}$$ (dentro al cilindro)

$$E_2 = +\frac{B \cdot R^2}{2 \cdot r_2 \cdot \Delta t}$$ (fuori dal cilindro)

cioè $$E(r) = \begin{cases} +\dfrac{B \cdot r}{2 \cdot \Delta t} & \text{se } \; r < R \\ +\dfrac{B \cdot R^2}{2 \cdot \Delta t \cdot r} & \text{se } \; r \geq R \end{cases}$$



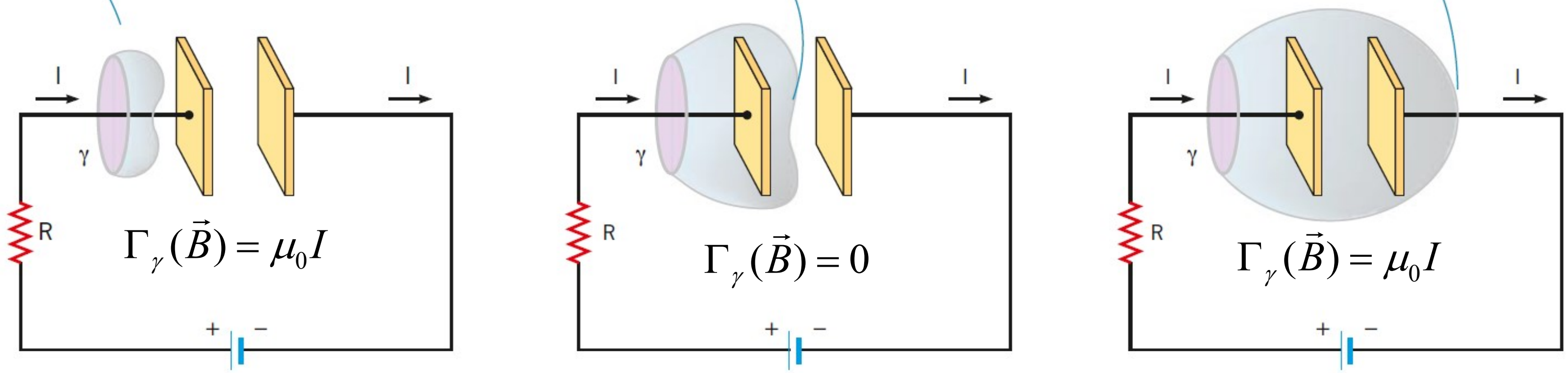
La “corrente di spostamento” (1)



Negli anni tra il 1861 e il 1865 **James Clerk Maxwell** riprende il teorema di Ampère (1826) e scopre una **contraddizione**.
Consideriamo un circuito RC in fase di carica: la corrente scorre dal polo + del generatore all’armatura + del condensatore, e dall’armatura – del condensatore al polo – della batteria. Tra le due armature, ovviamente, non c’è corrente.
Considerando la curva γ in figura, si osserva che il teorema di Ampère **non dà lo stesso esito** per tutte le superfici che hanno γ come bordo: nel secondo caso, infatti, **la superficie non è bucata da nessuna corrente**, dunque la circuitazione di B dovrebbe essere nulla.

La “corrente di spostamento” (2)

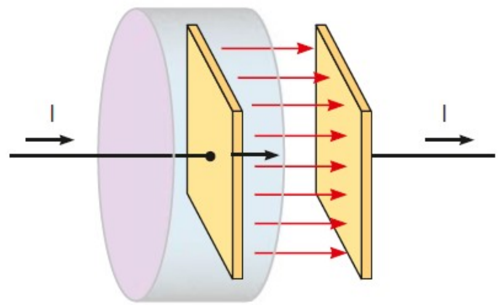
la corrente attraversa la superficie | la corrente non attraversa la superficie | la corrente attraversa la superficie



Maxwell osserva che il teorema di Ampère deve dare lo stesso risultato per *qualsiasi* superficie concatenata con la curva γ. Deduce allora che:

All’interno del condensatore c’è una **“corrente di spostamento”** uguale alla **corrente di conduzione** che scorre nel circuito, e che nasce dalla **variazione del campo elettrico** tra le due armature nel tempo.

$$I_s = \varepsilon_0 \frac{\Delta\Phi(\vec{E})}{\Delta t} = I$$



Il teorema di Ampère generalizzato

Maxwell scopre un’ulteriore simmetria tra i campi elettrico e magnetico. Infatti, per la legge di FNL, una variazione di flusso magnetico genera un campo elettrico indotto. Analogamente accade che:

Teorema di Ampère-Maxwell (TAM): Una variazione di flusso del campo elettrico genera un campo magnetico:

$$\Gamma_\gamma(\vec{B}) = \mu_0 \left(\sum_j I_j + \varepsilon_0 \frac{\Delta\Phi(\vec{E})}{\Delta t} \right)$$

campo “standard” dovuto alle correnti   campo “indotto”

dove il flusso del campo elettrico è calcolato attraverso una superficie avente come bordo la curva γ.

Il termine $\varepsilon_0 \frac{\Delta\Phi(\vec{E})}{\Delta t}$ è detto **corrente di spostamento** e ha le dimensioni di una corrente, <u>ma non si tratta di una corrente di cariche elettriche</u>, come possiamo ben capire dall’esempio del condensatore.

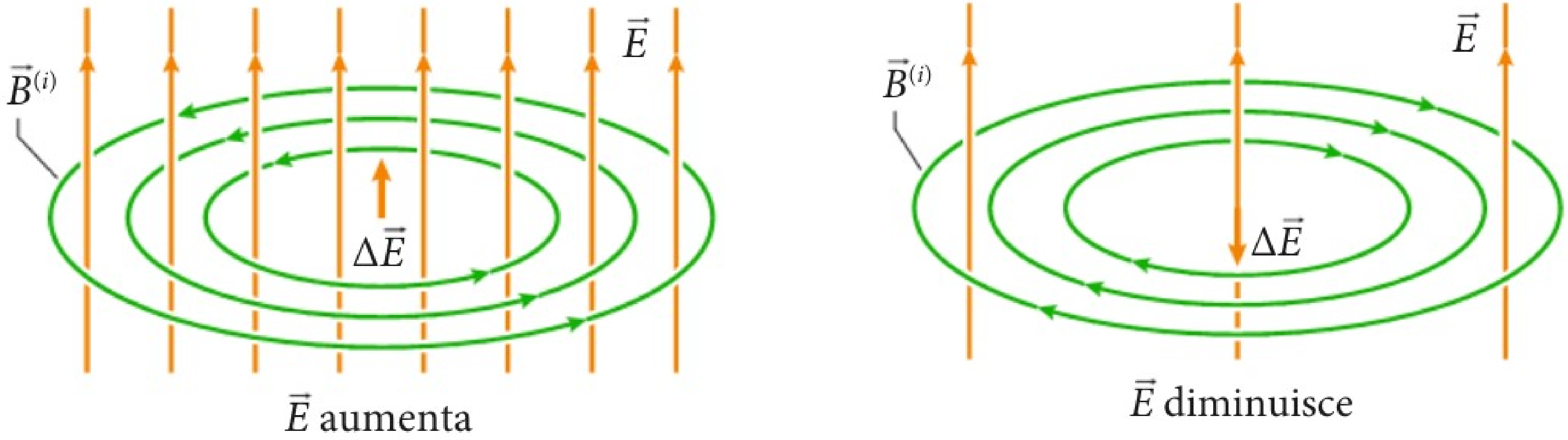
Conseguenze del Teorema di Ampère-Maxwell

Un campo elettrico variabile dà origine a un campo magnetico **indotto**.

Un campo magnetico può essere generato da:

- correnti elettriche (stazionarie o meno) → campo magnetico;
- campi elettrici variabili → campo magnetico "indotto".

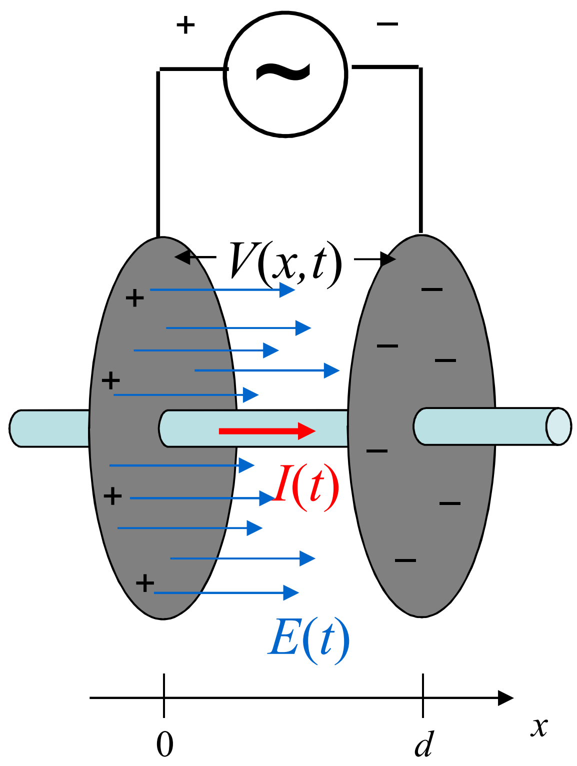
Dunque **campi elettrici e magnetici** hanno comportamenti **simmetrici.**



Il **verso delle linee** di B indotto si deduce applicando la **regola della mano destra** alle variazioni del campo elettrico ΔE.

Esempio 4.2

Un condensatore con due armature circolari di raggio R è alimentato da un generatore di corrente alternata, sicché il potenziale tra le sue armature varia nel tempo e nello spazio con la legge $V(x,t) = E_0 \cdot (d - x) \cdot \sin(\omega t)$. Al centro delle due armature è praticato un foro, in cui passa un cavo che trasporta una corrente variabile nel tempo con legge $I(t) = I_0 \cdot \cos(\omega t)$.
Determina il campo magnetico totale $B(r,t)$ nella regione tra le due armature alla distanza r dal filo, distinguendo il caso di $r < R$ dal caso di $r > R$.
NB: Ricorda che $E(x) = -\mathrm{d}V/\mathrm{d}x$.



Soluzione:

$$B(r,t) = \frac{\mu_0}{2\pi r}\big(I_0 + \varepsilon_0 E_0 \omega S(r)\big)\cos(\omega t) \quad \text{con} \quad S(r) = \begin{cases} \pi r^2 & \text{se } r < R \\ \pi R^2 & \text{se } r \geq R \end{cases}$$

Le equazioni di Maxwell
(campi elettrici e magnetici dinamici)

Regolano il comportamento dei campi elettrico e magnetico quando sono variabili nel tempo:

Teorema di Gauss	$\Phi_S(\vec{E}) = \dfrac{Q_T}{\varepsilon_0}$
Legge di Faraday-Neumann-Lenz	$\Gamma_\gamma(\vec{E}) = -\dfrac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$
Teorema di Gauss	$\Phi_S(\vec{B}) = 0$
Teorema di Ampère - Maxwell	$\Gamma_\gamma(\vec{B}) = \mu_0\left(\sum_j I_j + \varepsilon_0 \dfrac{d\Phi(\vec{E})}{dt}\right)$

Il campo elettrico e il campo magnetico non sono più grandezze indipendenti come nel caso statico, ma diventano due aspetti diversi e complementari di un unico ente fisico, il **campo elettromagnetico.**

Enunciato delle Equazioni

1. **(TGE)** Il flusso del campo E attraverso una qualsiasi superficie chiusa S è direttamente proporzionale alla carica totale Q contenuta entro S.

2. **(FNL)** La circuitazione del campo E lungo una qualsiasi curva chiusa γ è uguale ed opposta alla variazione(/derivata) nel tempo del flusso del campo B attraverso una qualsiasi superficie S avente la curva γ come bordo.

3. **(TGB)** Il flusso del campo B attraverso una qualsiasi superficie chiusa S è sempre nullo.

4. **(TAM)** La circuitazione del campo B lungo una qualsiasi curva chiusa γ è direttamente proporzionale alla somma algebrica delle correnti concatenate a γ e della corrente di spostamento, la quale è a sua volta proporzionale alla variazione(/derivata) nel tempo del flusso del campo E attraverso una qualsiasi superficie S avente la curva γ come bordo.

Equazioni di Maxwell con gli integrali (1)

$$\Gamma_\gamma(\vec{E}) = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i \cdot \Delta\vec{l}_i \quad \xrightarrow[n \to \infty,\ \Delta\vec{l}_i \to 0]{} \quad \oint_\gamma \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

Riscrivendo le circuitazioni dei campi in maniera integrale si ottiene:

Faraday-Neumann-Lenz

$$\oint_\gamma \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_S(\vec{B})}{\mathrm{d}t}$$

Ampère-Maxwell

$$\oint_\gamma \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \left[i_{\text{tot}} + \varepsilon_0 \frac{\mathrm{d}\Phi_S(\vec{E})}{\mathrm{d}t} \right]$$

NB: Il simbolo di integrale $\int$ talvolta contiene anche un cerchietto: $\oint$ ciò sta a indicare che la somma corrispondente viene condotta su di un percorso chiuso.

continua

Equazioni di Maxwell con gli integrali (2)

$$\sum_{j=1}^{n} \vec{E}_j \cdot \Delta\vec{S}_j \quad \xrightarrow[n\to\infty,\ \Delta\vec{S}_j \to 0]{} \quad \oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

Riscrivendo i flussi dei due campi in maniera integrale si ottiene:

Teorema di Gauss per E

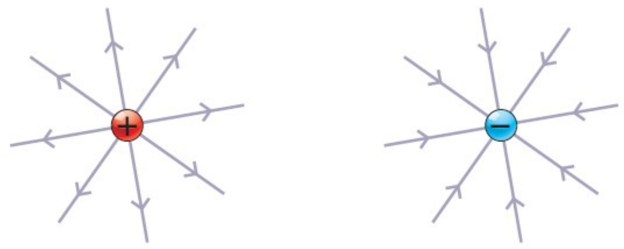
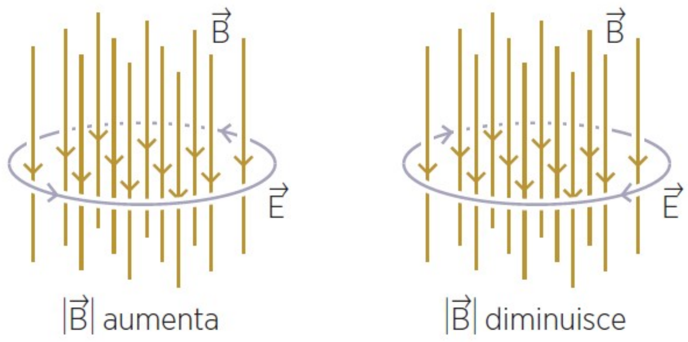
$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{Q_{tot}}{\epsilon_0}$$

Teorema di Gauss per B

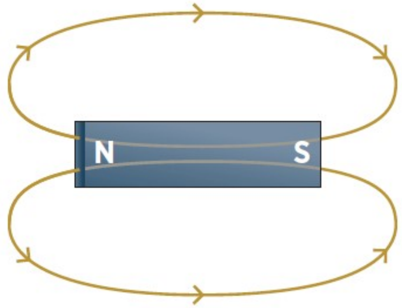
$$\oint_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$

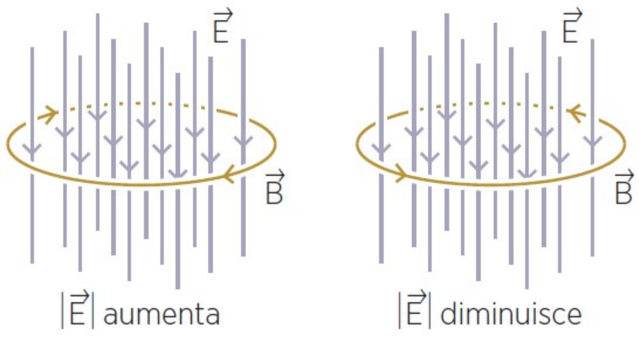
NB: Anche qui il simbolo di integrale riporta un cerchietto $\oint$ per indicare che la somma corrispondente viene fatta su di una superficie chiusa.

Interpretazione (1)

1	$\Phi(\vec{E}) = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$ Teorema di Gauss		le linee del campo elettrico sono aperte e hanno origine nelle cariche elettriche
LE CARICHE ELETTRICHE SONO LE SORGENTI DEL CAMPO ELETTRICO			
2	$\Gamma(\vec{E}) = -\dfrac{\Delta\Phi(\vec{B})}{\Delta t}$ Legge di Faraday-Neumann-Lenz		le linee del campo elettrico indotto sono linee chiuse intorno alle linee del campo magnetico
UN CAMPO MAGNETICO VARIABILE GENERA UN CAMPO ELETTRICO INDOTTO NON CONSERVATIVO			

Interpretazione (2)

3	$\Phi(\vec{B})=0$ Teorema di Gauss per il campo magnetico		le linee del campo magnetico sono linee chiuse
NON ESISTONO MONOPOLI MAGNETICI ISOLATI			

4	$\Gamma(\vec{B})=\mu_0\left(i+\varepsilon\dfrac{\Delta\Phi(\vec{E})}{\Delta t}\right)$ Legge di Ampère-Maxwell		le linee del campo magnetico (indotto) sono linee chiuse intorno alle correnti (o alle linee del campo ettrico)
UNA CORRENTE O UN CAMPO ELETTRICO VARIABILE GENERANO UN CAMPO MAGNETICO (INDOTTO)			

Unificazione di elettricità e magnetismo

- **Campo elettrico variabile e campo magnetico variabile** sono strettamente legati e non esistono indipendentemente l'uno dall'altro, ma come un unico campo, il **campo elettromagnetico.**
- **Nasce l'Elettromagnetismo, il secondo pilastro della fisica classica dopo la Meccanica di Newton.**

- Le **conseguenze principali** della teoria di Maxwell sono tre:

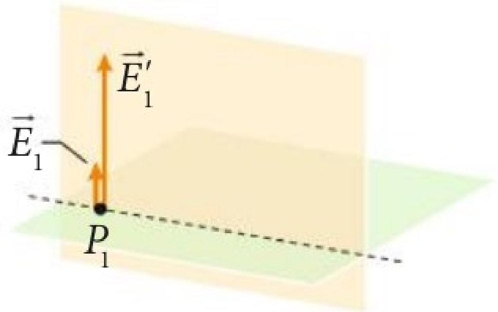
1. **Fenomeni elettrici e magnetici possono essere considerati due facce della stessa medaglia e ricondotti ad un'unica teoria.**
2. **Un campo elettromagnetico generato in un punto si propaga nello spazio come un'onda elettromagnetica.**
3. **La luce è un esempio di onda elettromagnetica: di conseguenza, tutta l'ottica è riconducibile all'elettromagnetismo.**

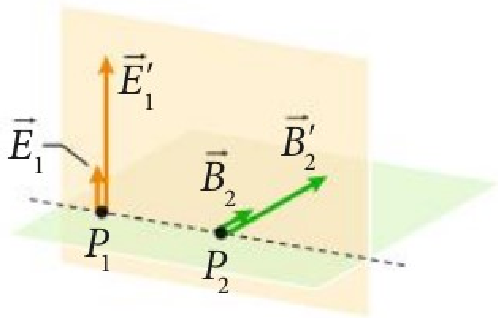
Onde elettromagnetiche

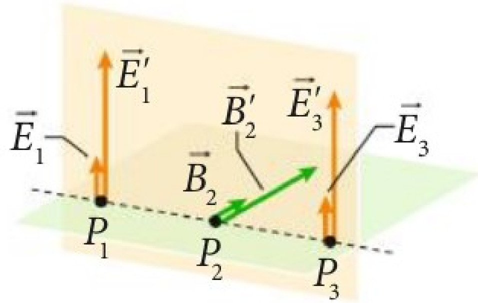
Il campo ***elettrostatico*** e quello ***magnetostatico*** sono campi elettrici particolari, ottenuti rispettivamente con cariche **elettriche ferme** o **correnti continue**.

Se però una carica oscilla avanti e indietro (**corrente alternata**) nel punto P_1, si genera:

- un *campo elettrico variabile* in P_1 (dovuto al moto della carica);
- un *campo magnetico variabile* in P_2 (per TAM);
- un *campo elettrico variabile* in P_3 (per FNL);
- …



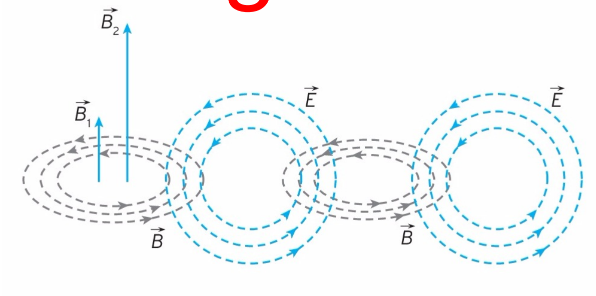




Il campo così descritto è chiamato **onda elettromagnetica**.

Velocità delle onde elettromagnetiche

Un campo ***elettrico variabile*** genera un campo ***magnetico variabile***, il quale a sua volta genera un campo elettrico variabile e così via. Tali oscillazioni si propagano nello spazio sotto forma di **onde elettromagnetiche**.



Le onde elettromagnetiche si propagano nel vuoto con una velocità

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

← Conclusione fondamentale ottenuta **risolvendo** le Equazioni di Maxwell

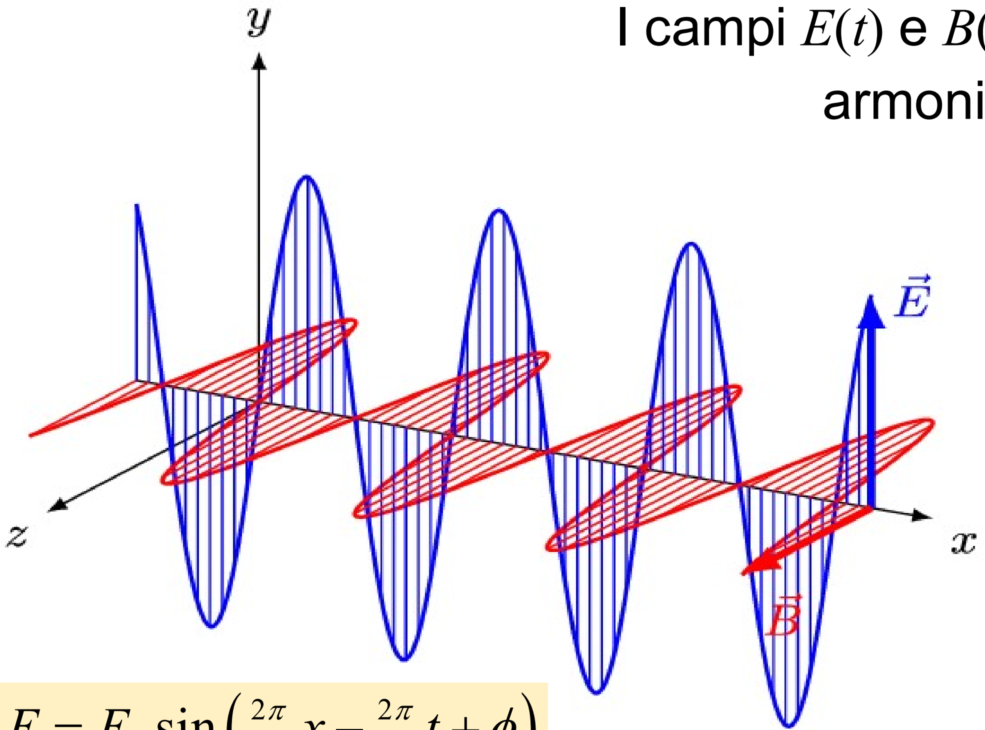
che coincide con la *velocità della luce nel vuoto*:

$$c = 299792458 \text{ m/s}$$

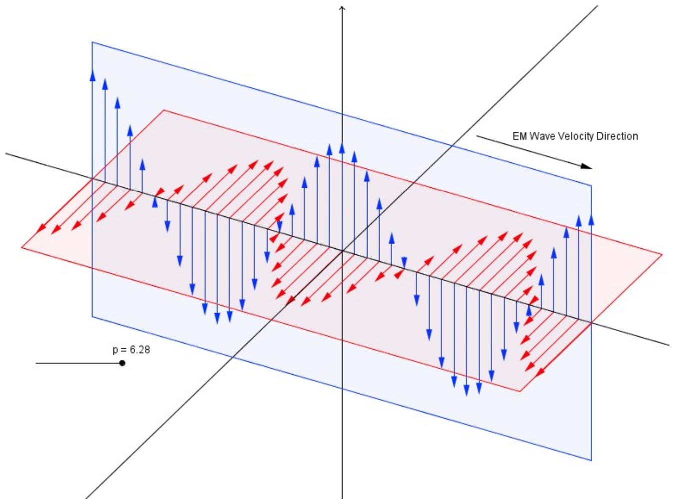
questo perché **la luce è costituita da onde elettromagnetiche.**

L'esistenza delle onde elettromagnetiche è stata prevista teoricamente da James Clerk Maxwell (1867), prima di essere verificata sperimentalmente nel 1888 da Heinrich Hertz.

Struttura dell'onda



I campi $E(t)$ e $B(t)$ di un'onda elettromagnetica armonica **oscillano periodicamente** nel **tempo** e nello **spazio**.

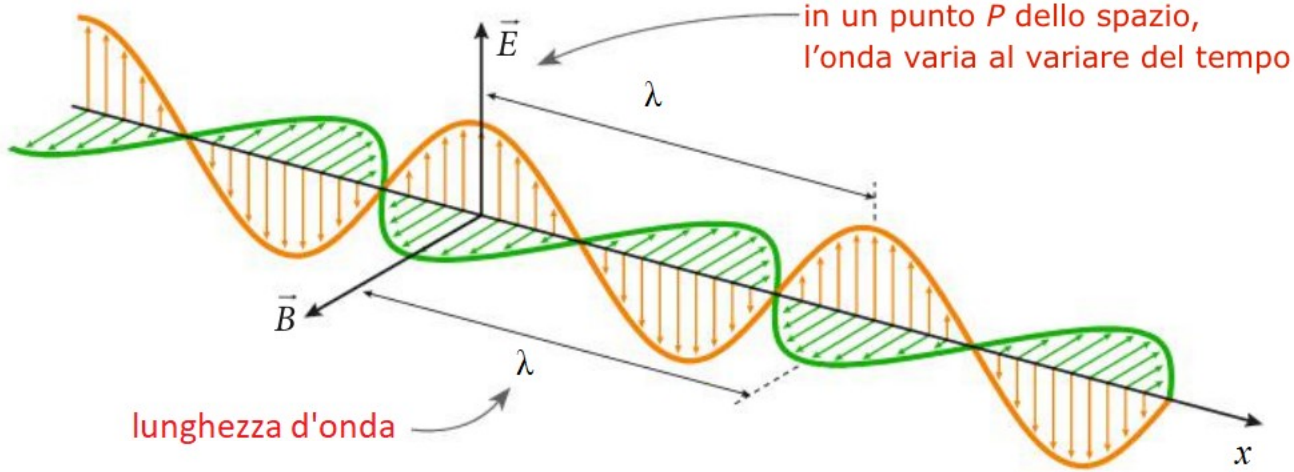


$$E = E_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - \frac{2\pi}{T}t + \phi\right)$$

La **frequenza** f o il **periodo** $T = 1/f$ sono determinati dalla *sorgente*: le cariche oscillanti.

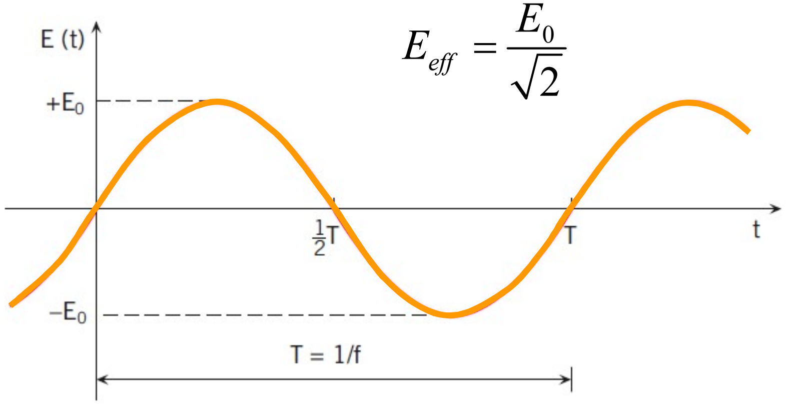
La **lunghezza d'onda** λ è legata alla frequenza dalla relazione: $c = \lambda \cdot f$

Andamento spaziale e temporale di un'onda

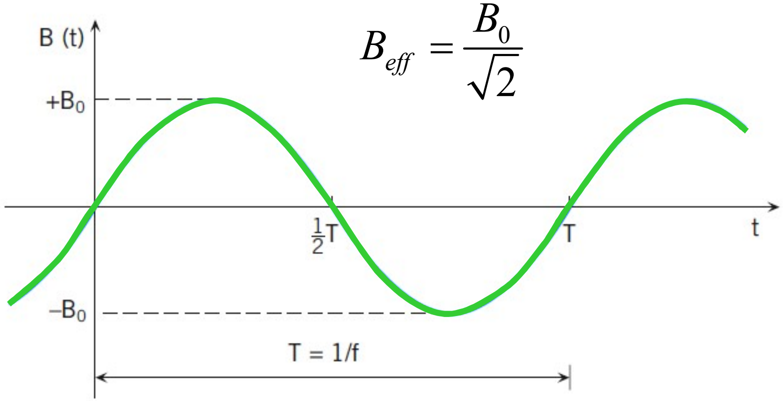


Fotografia dell'onda nello spazio ad un istante di tempo t fissato.

Andamento nel tempo dei campi E e B osservati in un punto fissato x nello spazio:



$$E_{eff} = \frac{E_0}{\sqrt{2}}$$



$$B_{eff} = \frac{B_0}{\sqrt{2}}$$

Orientazione dei campi E e B

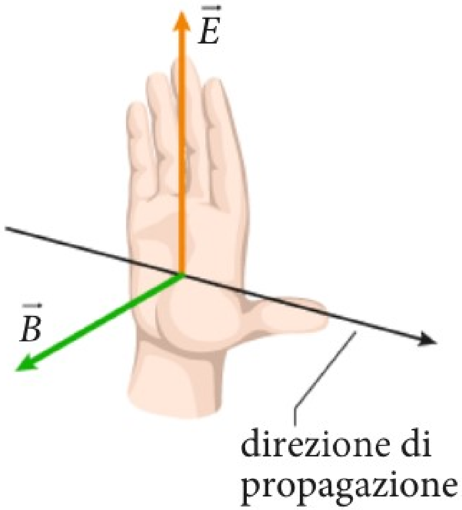
In ogni punto e in ogni istante, i campi $E(t)$ e $B(t)$ di un'onda elettromagnetica sono *perpendicolari* alla direzione di propagazione dell'onda e *perpendicolari* tra loro.
Le onde elettromagnetiche sono pertanto **onde trasversali**.

I campi che la costituiscono $E(t)$ e $B(t)$ sono costantemente **in fase**, quindi sono tra loro proporzionali:

$$E(t) = c \cdot B(t)$$

Un'onda elettromagnetica si dice:

- **armonica** (come nell'esempio precedente) se i campi in un punto oscillano in maniera sinusoidale;
- **piana** se la direzione di propagazione è una sola (è invece **sferica** se si propaga indistintamente in tutte le direzioni)

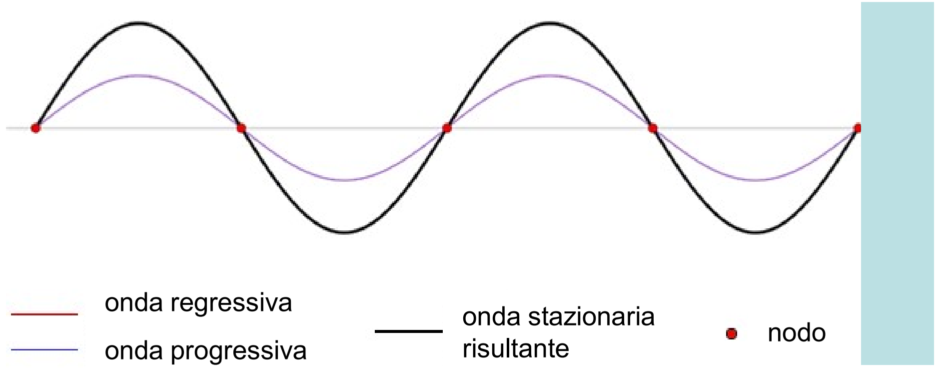


Ripasso: onde stazionarie

- L'**onda stazionaria** nasce dall'**interferenza** tra due onde, una **progressiva** (cioè viaggiante all'avanti) ed una **regressiva** (cioè viaggiante all'indietro) riflessa da un ostacolo, aventi rispettivamente equazione:

$$y = a\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - \frac{2\pi}{T}t\right) \quad \text{e} \quad y = -\,a\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x + \frac{2\pi}{T}t\right)$$

- Per sommare queste due onde si usano le **formule di Prostaferesi**. Si ottiene un'onda **non viaggiante** avente ampiezza doppia rispetto alle onde di partenza, stesso periodo T e stessa lunghezza d'onda λ:

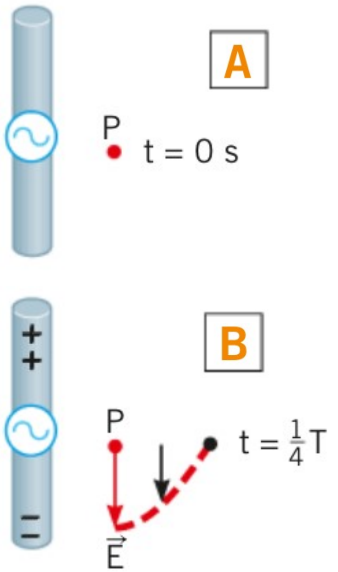


$$y = 2a\text{sen}\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)\text{sen}\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

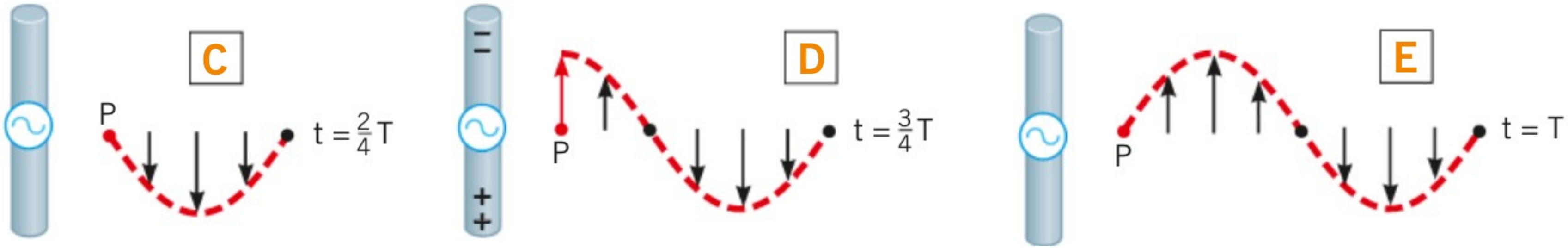
$$\cos p - \cos q = -2\text{sen}\frac{p-q}{2}\text{sen}\frac{p+q}{2}$$

Generazione di onde con antenna: campo elettrico

Alternatore connesso a due fili rettilinei (antenna):

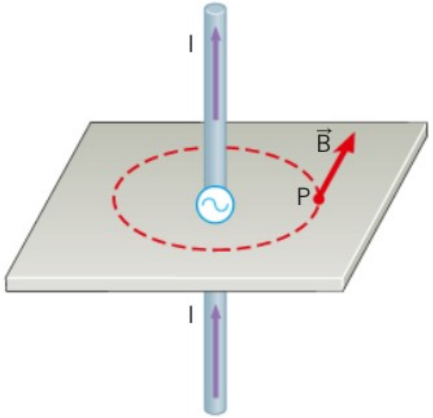


- il **generatore di corrente alternata** determina un accumulo periodico di cariche agli estremi;
- queste cariche generano un **campo elettrico variabile**, **periodico nel tempo** (con la stessa frequenza del generatore);
- il campo generato in istanti di tempo precedenti non scompare, ma *si propaga come onda* nello spazio circostante.

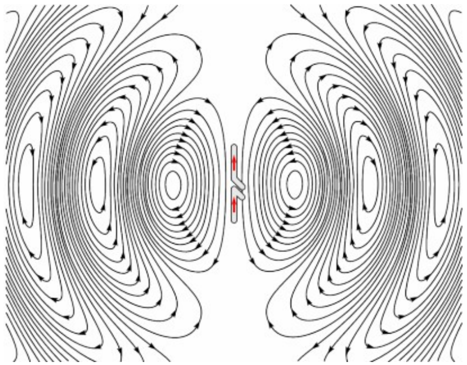


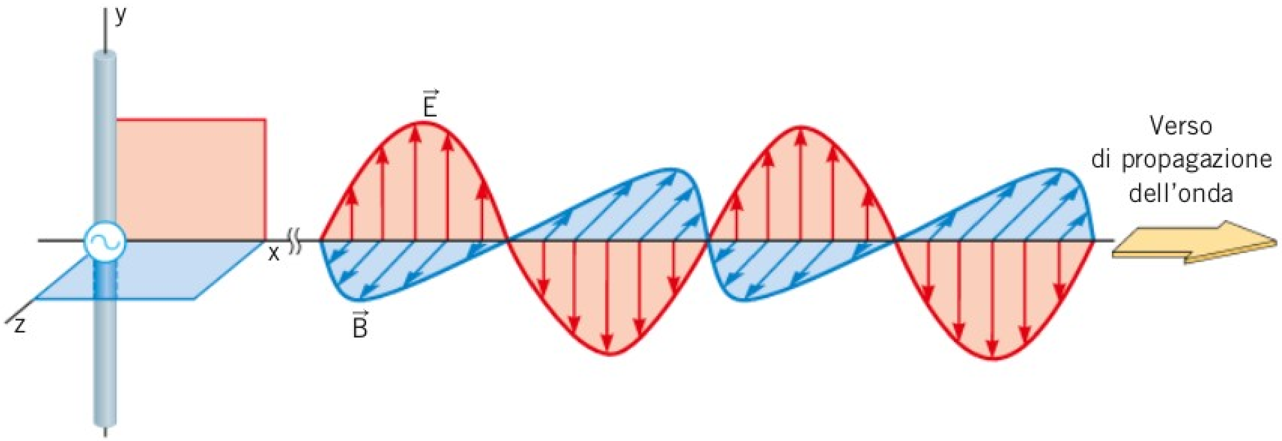
Generazione di onde con antenna: campo magnetico

La corrente nell'antenna, oltre al campo elettrico, crea anche un campo magnetico. Mentre la corrente oscilla, il campo magnetico oscilla con essa.

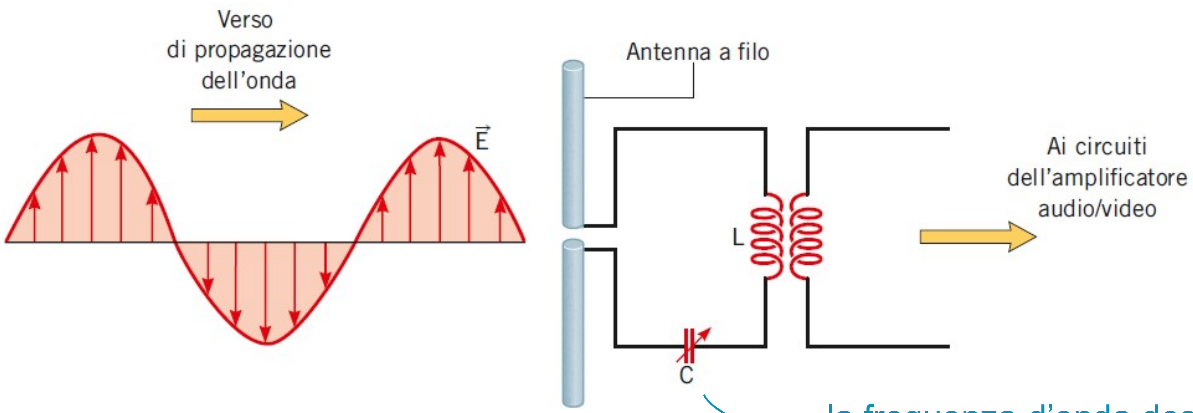


I campi elettrico e magnetico formano un'onda anche a grandi distanze dall'antenna. L'onda continua a propagarsi anche quando la carica accelerata che l'ha prodotta ha smesso di muoversi.

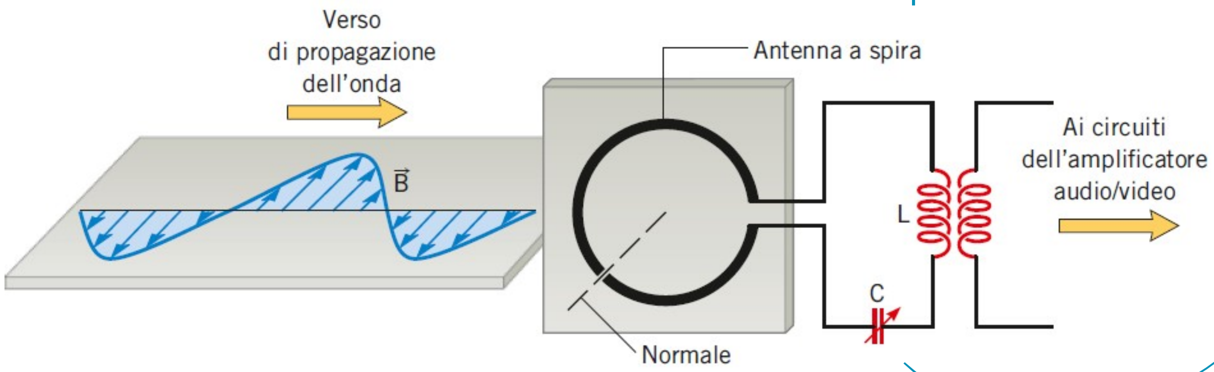




Ricezione di onde elettromagnetiche



la frequenza d'onda desiderata viene selezionata con un condensatore a capacità variabile



Approfondimento: Struttura dell'emettitore e del ricevitore di onde e.m.

Un circuito oscillante LC può essere utilizzato per produrre o ricevere onde e.m.:

1. Nella **stazione emittente S**, il generatore G di corrente alternata carica il condensatore.
2. Il condensatore C periodicamente scambia energia con l'induttore L.
3. I due estremi dell'induttore sono collegati uno a terra e l'altro ad un'antenna.
4. L'antenna, sottoposta ad una tensione variabile, genera un campo elettrico oscillante con la frequenza propria del circuito LC.
5. Il campo si propaga come onda e.m. nello spazio, sottraendo energia al circuito (la presenza del generatore che periodicamente ricarica C serve a compensare questa perdita).
6. Le cariche presenti nell'antenna della **stazione ricevente S'** oscillano con la frequenza dell'onda e.m..
7. Le oscillazioni hanno massima ampiezza se la frequenza dell'onda è uguale alla frequenza propria del circuito L'C' della stazione (**condizione di risonanza**).
8. Tale frequenza può essere variata agendo sulla capacità C' del condensatore variabile (***tuning*** o ***sintonizzazione*** della stazione S'), selezionando così una specifica frequenza di ricezione per le onde e.m..

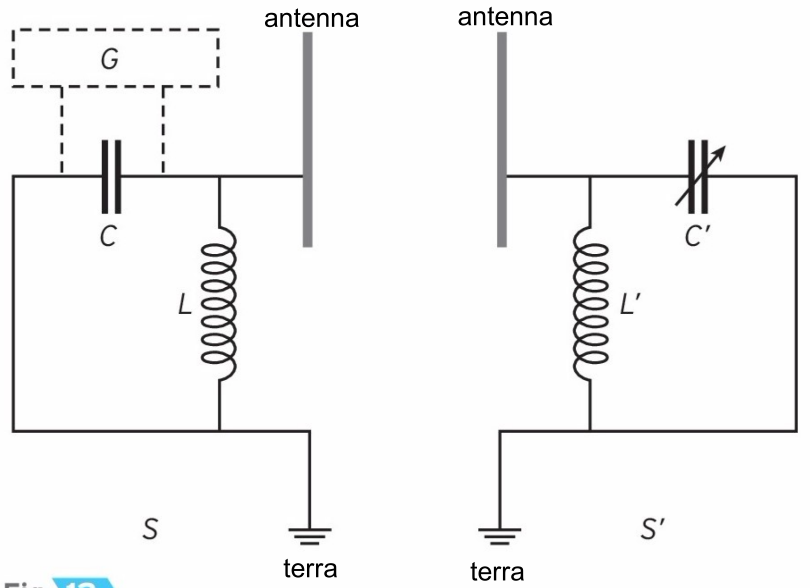
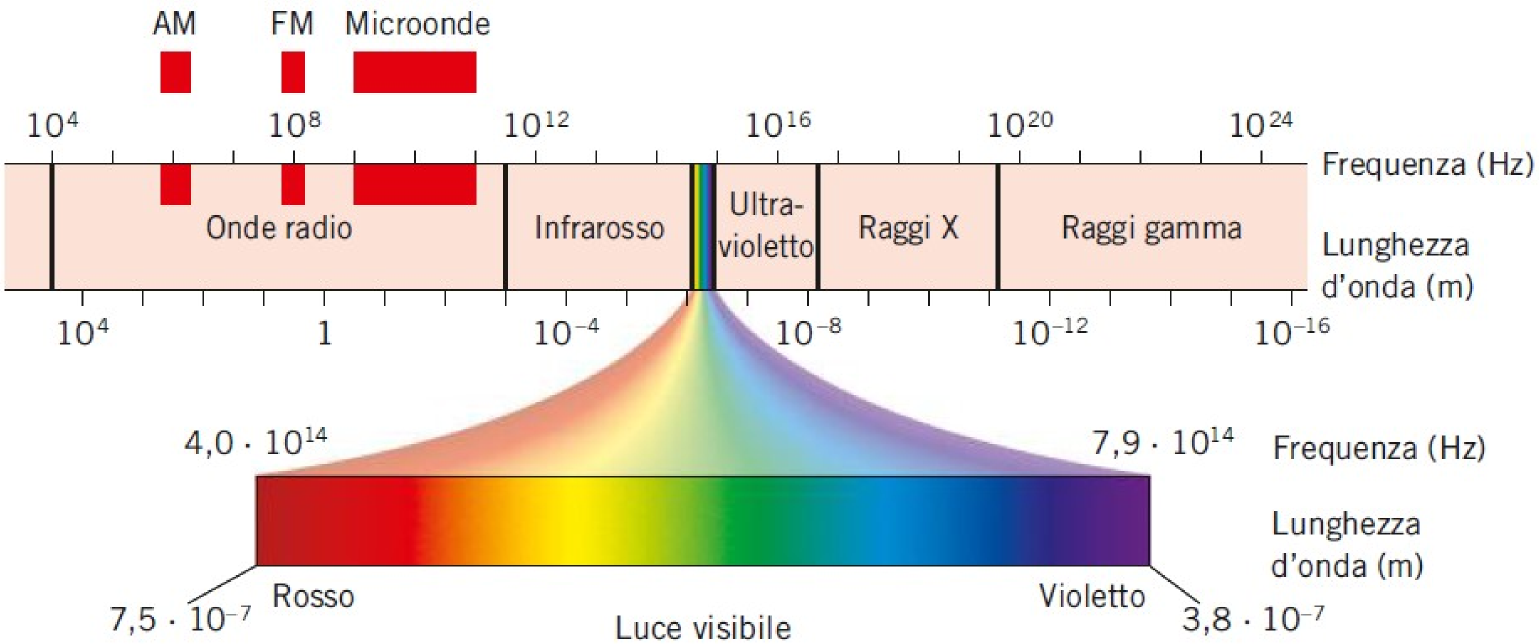


Fig. 12

Spettro elettromagnetico

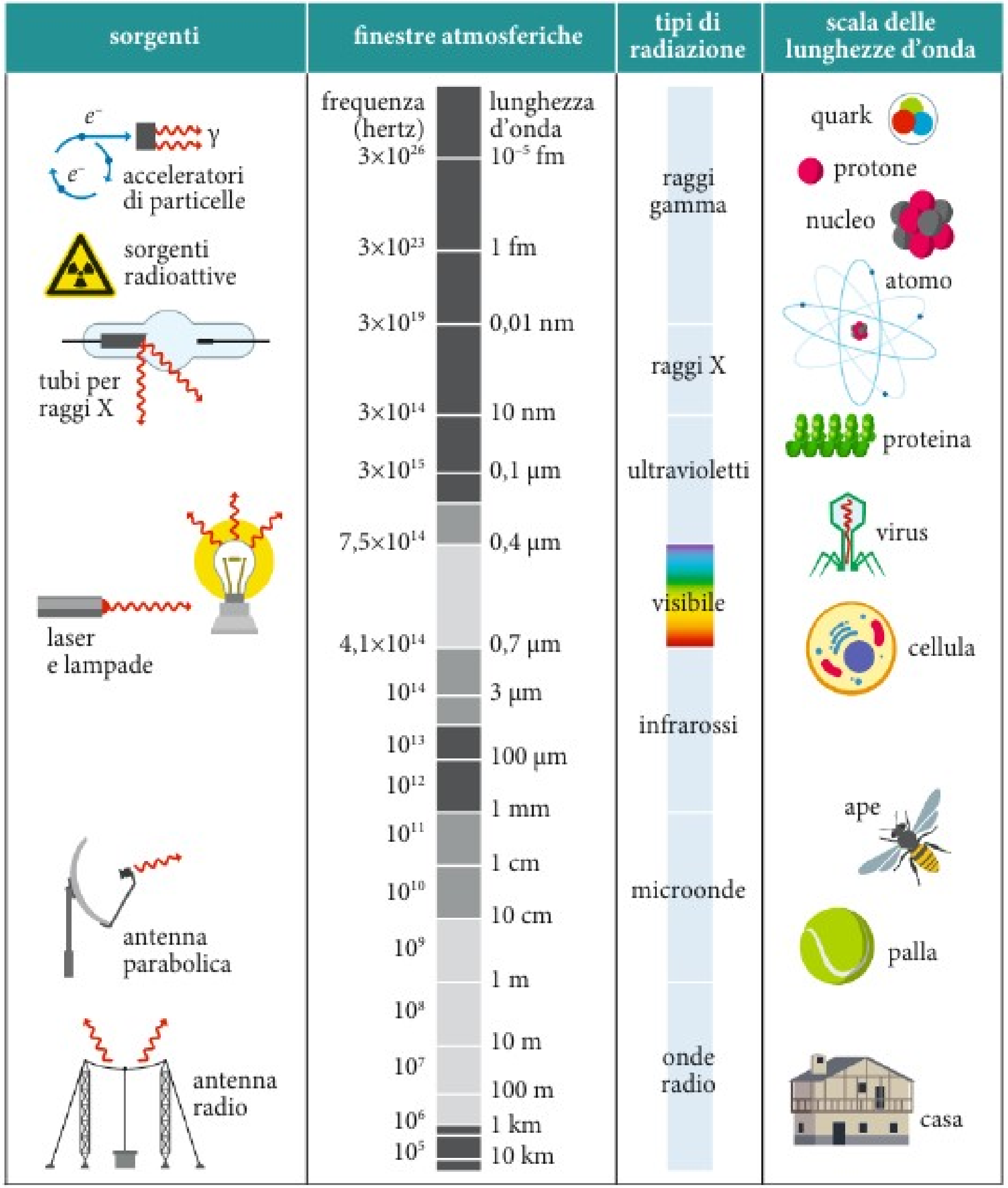
La serie ordinata di frequenze o lunghezze d’onda delle onde elettromagnetiche è detta **spettro elettromagnetico**.



La divisione dello spettro in regioni non è così netta e dipende dalle convezioni adottate

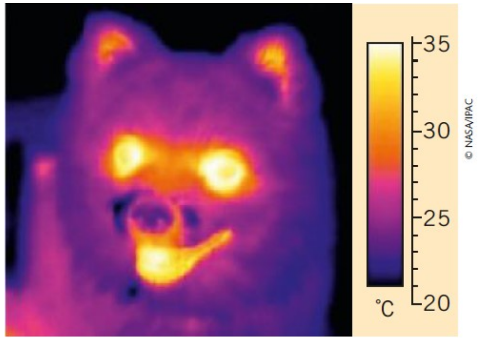
Regioni dello Spettro

- Ogni regione dello spettro è associata ad un certo **range** di **frequenze *f*** e **lunghezze d'onda *λ***.
- Come vedremo più avanti, studiando la meccanica quantistica, la **frequenza** in un certo senso è associata all'**energia** trasportata dall'onda (misura l'energia dei singoli fotoni: ecco perché un laser blu è più pericoloso di un laser rosso) e quindi ai **fenomeni** fisici che può "**attivare**".
- La lunghezza d'onda misura invece la **dimensione degli oggetti** con cui la radiazione può **interagire per diffrazione**: ecco perché le onde radio riescono facilmente a coprire grandi distanze ed aggirare ostacoli come gli edifici, mentre per studiare i cristalli si utilizza la diffrazione a raggi X (la cui λ è paragonabile alle distanze interatomiche).



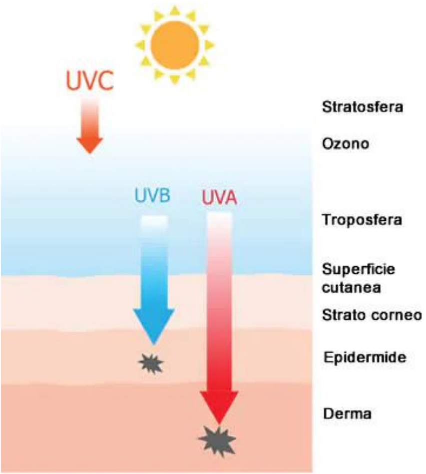
Tipi di onde (1)

- **Onde radio:** utilizzate per le trasmissioni radiofoniche e televisive.
- **Microonde:** conoscono vari usi, per esempio nella telefonia mobile, nei radar e nel forno a microonde. Le molecole d’acqua presenti nei cibi sono messe in moto dal campo elettrico dell’onda e quindi acquistano energia che trasferiscono ai cibi aumentandone la temperatura.
- **Radiazioni infrarosse**: danno informazioni sulla temperatura della sorgente che le ha emesse. Sono generate dalla vibrazione e dalla rotazione delle molecole nel materiale.



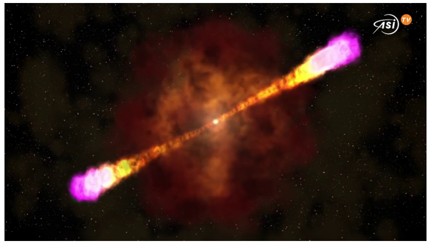
- **Radiazione visibile o luce:** il sistema occhio-cervello associa luce di diverse lunghezze d’onda a colori diversi.

Tipi di onde (2)

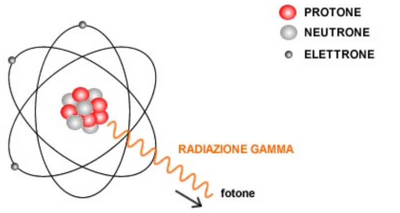


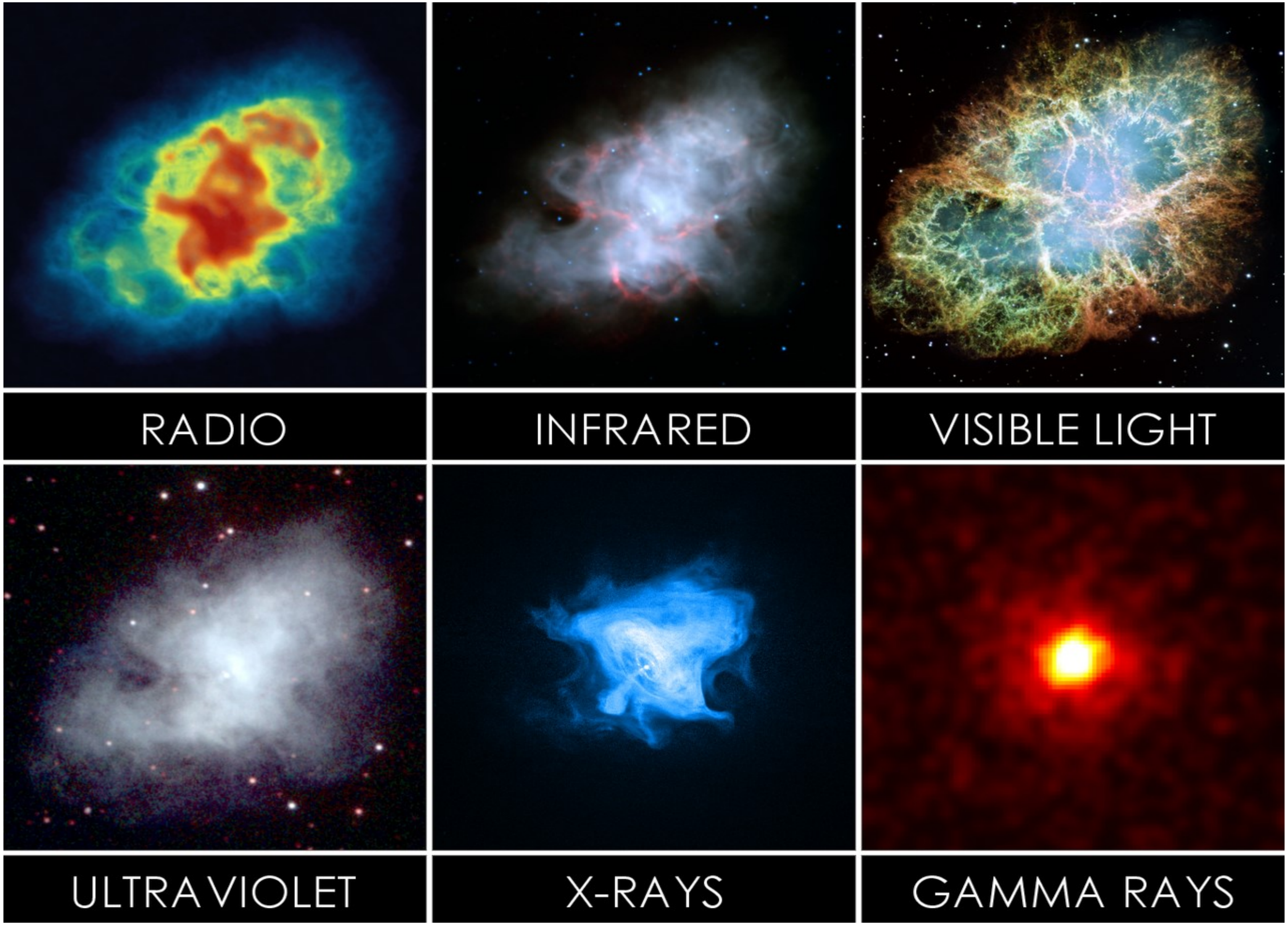
- **Radiazioni ultraviolette**: penetrano negli strati superficiali della nostra pelle e attivano reazioni chimiche fondamentali per la salute, per esempio la produzione di vitamina D e di melanina. Possono però causare anche tumori (melanoma).

- **Raggi X**: sono emessi durante le violente decelerazioni di elettroni ad alta velocità all'interno di metalli pesanti. Sono diffusamente impiegati in medicina (perché attraversano i tessuti molli ma sono assorbiti dalle ossa) e in astronomia.



- **Raggi gamma**: emesse nei decadimenti nucleari oppure da eventi cosmici di enorme energia (supernove, buchi neri). Sono radiazioni molto penetranti, che trovano impiego nella sterilizzazione di strumenti chirurgici e nella radioterapia dei tumori.





Sei fotografie della **Nebulosa del Granchio** (supernova) prese in diverse regioni dello spettro elettromagnetico.

Grandezze caratterizzanti un'onda E.M.

ATTENZIONE: IL LIBRO USA UNA NOTAZIONE PARZIALMENTE DIVERSA

Come ogni onda, l'onda elettromagnetica trasporta un'**energia** U ed una **quantità di moto** Q. Queste grandezze vengono però più facilmente espresse se valutate per unità di volume

Energia totale U [J]	**densità di energia** u [J/m³ = Pascal] (energia per unità di volume)
Quantità di moto totale $\vec{Q}$ [kg·m/s]	**dens. di quantità di moto** $\vec{q}$ [kg/(s·m²)] (quantità di moto per unità di volume)

La quantità di moto, se applicata ad una **superficie** S, genera una forza su di essa, e dunque una **pressione** p (la luce "spinge"!).

Come le onde sonore, anche le onde elettromagnetiche sono caratterizzate da una **potenza** P [W] (che dipende solo dalla sorgente) e da una **intensità** I [W/m²], anche detta **"irradiamento"** (che dipende anche dalla ***superficie*** S su cui l'onda si "diluisce").

Densità di energia di un'onda

Dalle definizioni di densità volumica di energia u per un campo elettrico e uno magnetico nel vuoto, usando la relazione tra ε_0, μ_0 e c ottengo:

$$u(t) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2(t) + \frac{1}{2\mu_0}B^2(t) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2(t) + \frac{1}{2}\varepsilon_0 c^2 B^2(t)$$

Con la relazione tra i moduli dei campi ($E=cB$), i due termini sono uguali tra loro. Il risultato si semplifica in:

$$u(t) = \varepsilon_0 E^2(t) \quad \text{oppure} \quad u(t) = \frac{1}{\mu_0}B^2(t)$$

Il campo elettrico oscilla sinusoidalmente, dunque anche la densità di energia oscilla tra zero e un valore massimo (legato al valore di picco del campo E_0). Analogamente, per stimare il valor medio $\bar{u}$ della densità di energia nel tempo si usa il campo elettrico efficace:

$$u_{\max} = \varepsilon_0 E_0^{\,2} \qquad \bar{u} = \varepsilon_0 E_{eff}^{\,2} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^{\,2}$$

Nella **materia**:
$\varepsilon_0 \rightarrow \varepsilon$
$\mu_0 \rightarrow \mu$

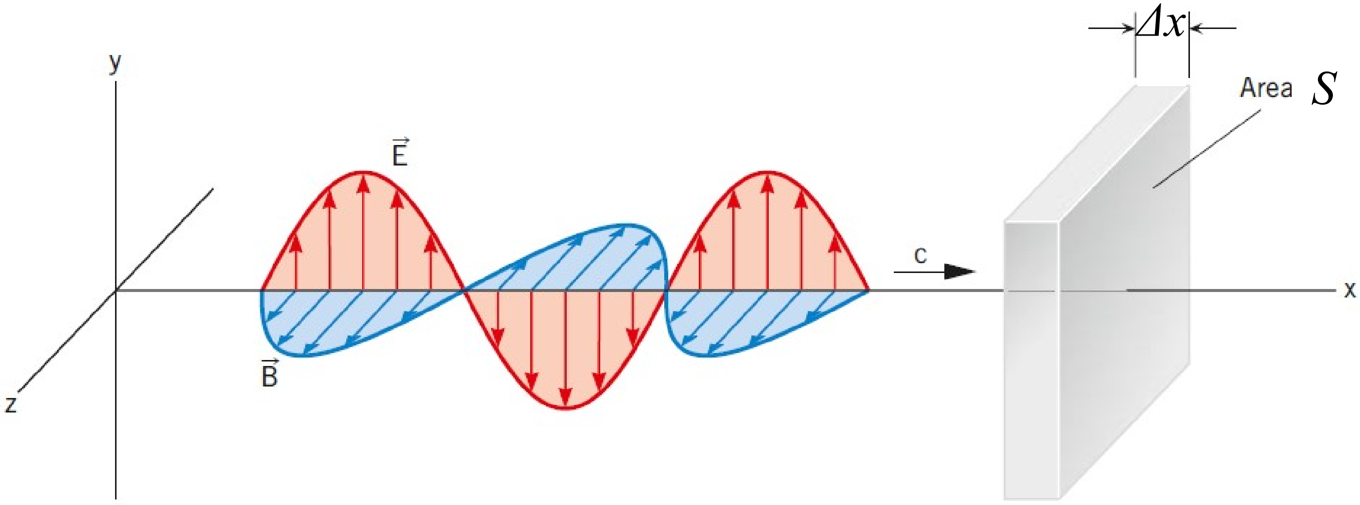
Irradiamento (Intensità) di un'onda

L'**irradiamento** o **intensità** I di un'onda elettromagnetica è il rapporto fra la potenza elettromagnetica P che attraversa perpendicolarmente una superficie e l'area S della superficie:

$$I = \frac{P}{S} = \frac{U}{\Delta t \cdot S} = \frac{U}{\frac{\Delta x}{c} \cdot S} = \frac{cU}{\Delta x \cdot S} = \frac{cU}{V} = cu$$

$$I = c\varepsilon_0 E^2$$

$$I = \frac{c}{\mu_0} B^2$$

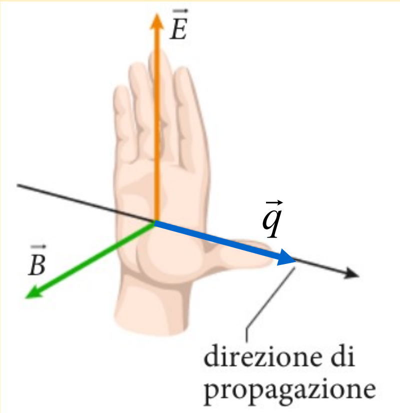


Densità di quantità di moto di un'onda elettromagnetica

Come le particelle, anche le onde trasportano quantità di moto.

La **densità di quantità di moto** $\vec{q}$ trasportata da un'onda elettromagnetica è

$$\vec{q} = \varepsilon_0 \left(\vec{E} \times \vec{B} \right)$$



$\vec{q}$ ha stessa direzione e stesso verso di propagazione dell'onda e modulo pari a

$$q = \frac{u}{c}$$

dove u è la **densità di energia** dell'onda.

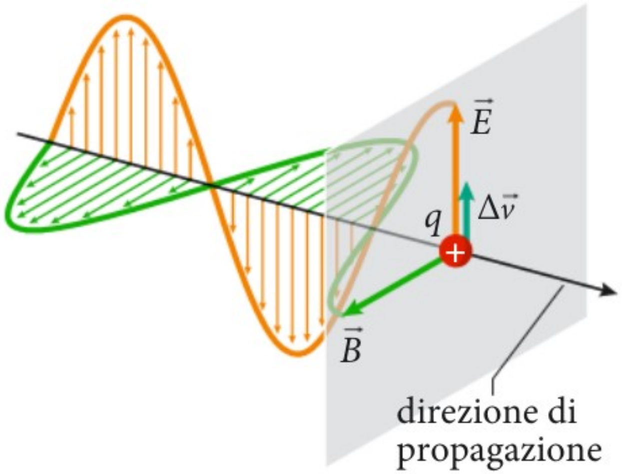
La **quantità di moto complessiva** Q trasportata da un *pacchetto d'onda* è legata all'energia complessiva dalla relazione

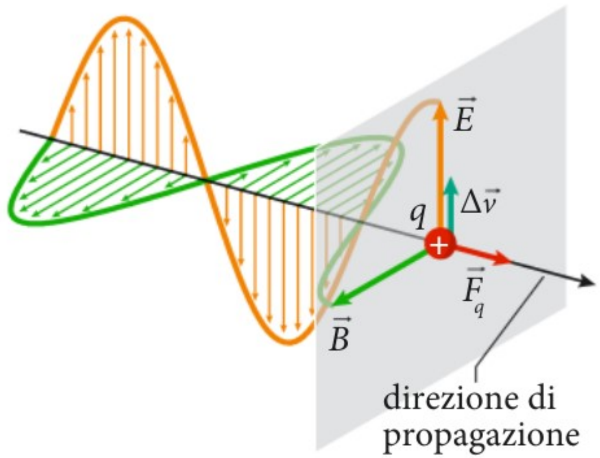
$$Q = \frac{U}{c}$$

Quantità di moto trasferita

Una particella carica (inizialmente ferma) varia il suo stato di moto nell'interazione con un'onda:

- Campo elettrico ⟶ La carica subisce una variazione di velocità nella direzione e nel verso del campo elettrico (moto rettilineo uniformemente accelerato)
- Campo magnetico ⟶ La carica, se ha una velocità non nulla, subisce una spinta per effetto della forza di Lorentz (moto circolare uniforme)

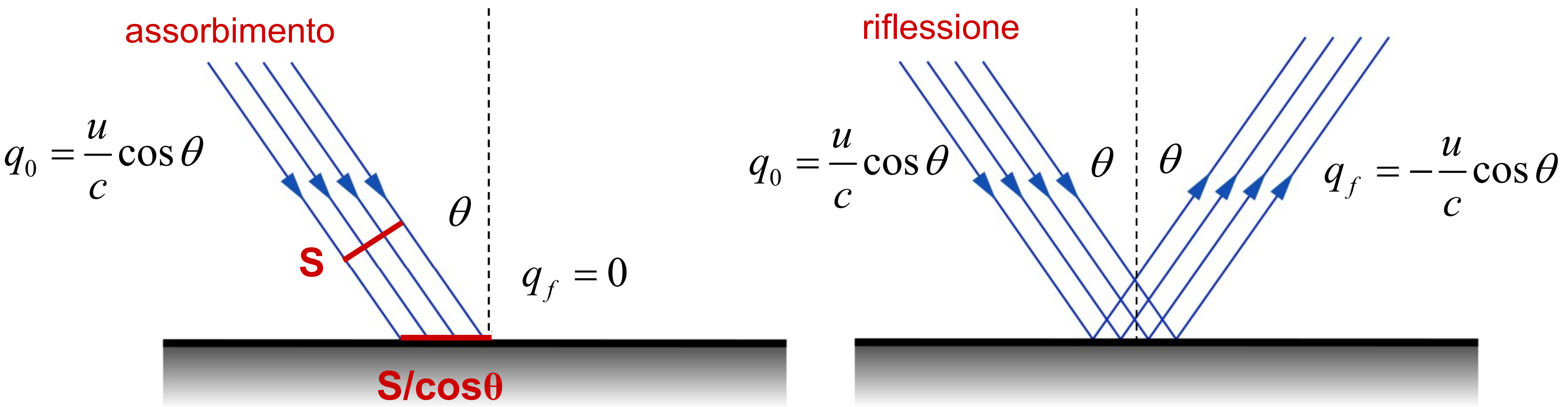




La pressione di radiazione (1)

Le onde elettromagnetiche danno origine a una **pressione *p*** quando vengono assorbite o riflesse da una superficie, come le molecole di un gas generano l'ordinaria pressione tramite urti. Nel determinare la pressione conta solo la componente della **quantità di moto perpendicolare alla superficie** ($u/c \cdot \cos\theta$), e per fasci inclinati cambia la **"superficie efficace"** rispetto alla **sezione S** del fascio ($S_{eff}=S/\cos\theta$):

$$p = \frac{(\text{forza})}{(\text{superficie})} = \frac{(\text{q.tà moto trasferita})}{(\text{tempo})(\text{superficie eff.})} = \frac{\Delta Q}{\Delta t}\frac{\cos\theta}{S} = \frac{\Delta Q}{\Delta t}\frac{\Delta x}{V}\cos\theta = \frac{\Delta Q}{V}\frac{\Delta x}{\Delta t}\cos\theta = \Delta q \cdot c\cos\theta$$



$$\Delta q = \frac{u}{c}\cos\theta \quad \Rightarrow \quad p = u\cos^2\theta$$

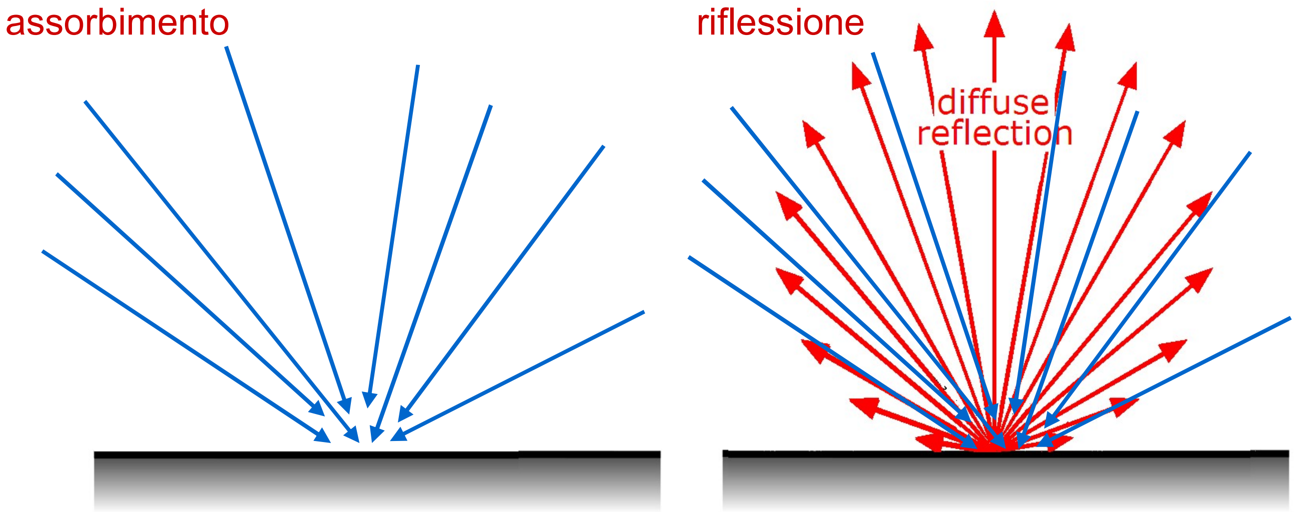
$$\Delta q = \frac{2u}{c}\cos\theta \quad \Rightarrow \quad p = 2u\cos^2\theta$$

La pressione di radiazione (2)

Come abbiamo visto, la pressione dipende dall'angolo con cui il raggio luminoso incide sulla superficie ($p \propto \cos^2\theta$).
Se la radiazione incidente è **diffusa**, ossia proviene casualmente da più direzioni, la media sulle diverse direzioni (media su $\cos^2\theta$) determina un fattore di riduzione pari ad $^1/_3$:

media sulle diverse direzioni

$$p_{diffusa} = \left\langle \frac{(\text{forza})}{(\text{superficie})} \right\rangle = \frac{1}{3} p_{\max} = \frac{1}{3} \Delta q_{\max} \cdot c$$

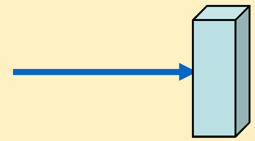


$$p = \frac{1}{3} u \qquad\qquad p = \frac{2}{3} u$$

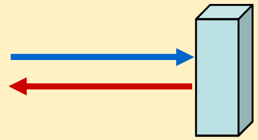
La pressione di radiazione (3)

Le onde elettromagnetiche danno origine a una **pressione *p*** quando vengono assorbite o riflesse da una superficie, come le molecole di un gas generano l'ordinaria pressione tramite urti:

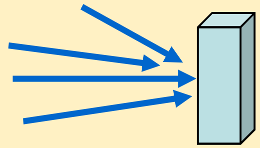
- onda incidente *perpendicolarmente*, superficie *assorbente*: $$p = u$$



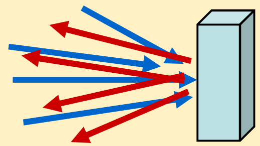
- onda incidente *perpendicolarmente*, superficie *riflettente*: $$p = 2u$$



- radiazione *diffusa*, superficie *assorbente*: $$p = \frac{1}{3}u$$



- radiazione *diffusa*, superficie *riflettente*: $$p = \frac{2}{3}u$$



Applicazioni: le Vele Solari

- Le **vele solari** (o **vele fotoniche** / **aeree**) sono una forma di propulsione spaziale che sfrutta la **pressione di radiazione.**
- Alla distanza della Terra dal Sole la pressione di radiazione è pari a $4{,}563 \times 10^{-6}$ Pa e decresce con il quadrato della distanza dalla sorgente di luce. Anche se la spinta è piccola, essa continuerà finché la sorgente luminosa splende e la vela è dispiegata.

- Il meccanismo della vela solare viene utilizzato occasionalmente **in combinazione** con i **sistemi di propulsione ordinari** per le sonde e i satelliti. Ciò consente di **risparmiare del carburante** che altrimenti sarebbe destinato per le correzioni dell'assetto e le modificazioni dell'orbita.

Vele solari all'ESA (European Space Agency)

Modello della sonda giapponese IKAROS, la prima ad usare le vele solari come propulsione, lanciata nel 2010

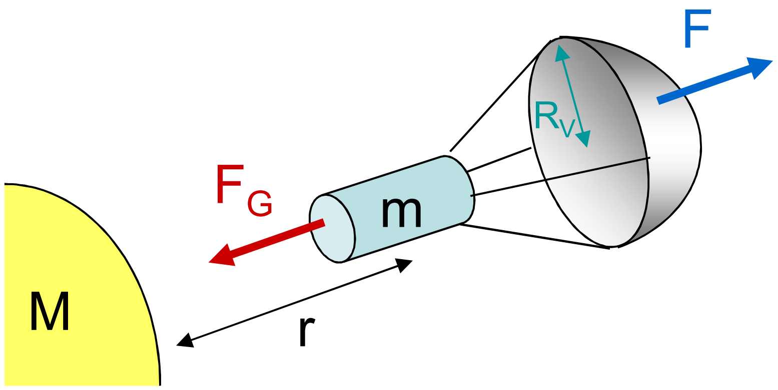
Esempio 4.3

Una sonda spaziale di massa *m* ha una vela solare a forma di semisfera di raggio R_V, perfettamente riflettente. Determina il raggio della vela affinché la pressione di radiazione solare sia sufficiente a vincere l'attrazione gravitazionale del sole (massa *M*, potenza *P*).

NB: Si osservi che se la luce incide perpendicolarmente su di una superficie semisferica, l'**area efficace** che assorbe l'energia e su cui viene esercitata la pressione solare è pari al **cerchio massimo della sfera**.

Forza gravitazionale: $F_G = G \cdot m \cdot M / r^2$
Forza di pressione: $F = p \cdot S_{eff} = p \cdot \pi R_V^2$
Ricordando che $p = 2u = 2I/c = 2P/(4\pi r^2 c)$

$$F > F_G \quad \Rightarrow \quad \frac{PR_V^2}{2cr^2} > G\frac{mM}{r^2} \quad \Rightarrow \quad R_V > \sqrt{\frac{2GcmM}{P}}$$



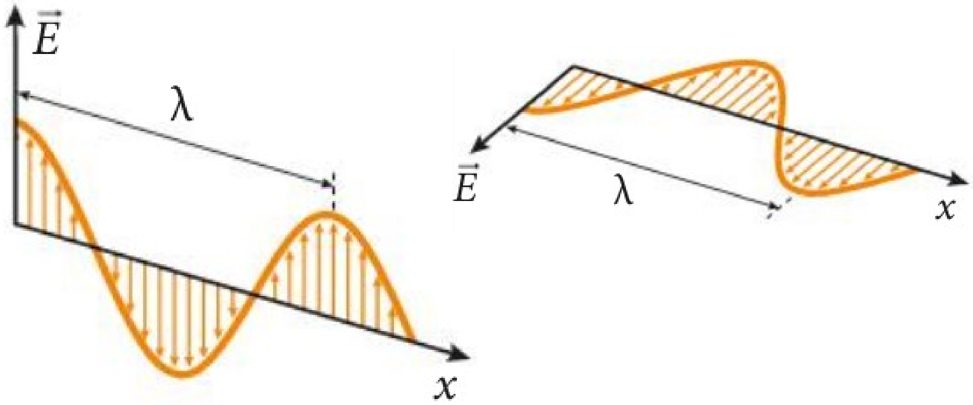
Per una sonda di m=500 kg, sapendo che $M = 1{,}99 \cdot 10^{30}$ kg e che $P = 3.87 \cdot 10^{26}$ W abbiamo $R_V > 321$ m

Polarizzazione

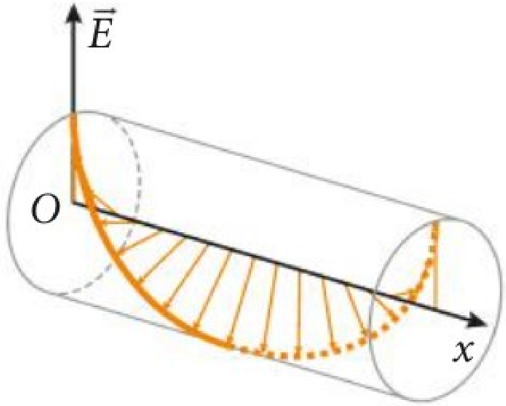
La direzione del campo elettrico di un'onda elettromagnetica è detta **direzione di polarizzazione** dell'onda.

Onda polarizzata $\longrightarrow$ la direzione di oscillazione di $\vec{E}$ è costante o varia con regolarità

Polarizzazione lineare



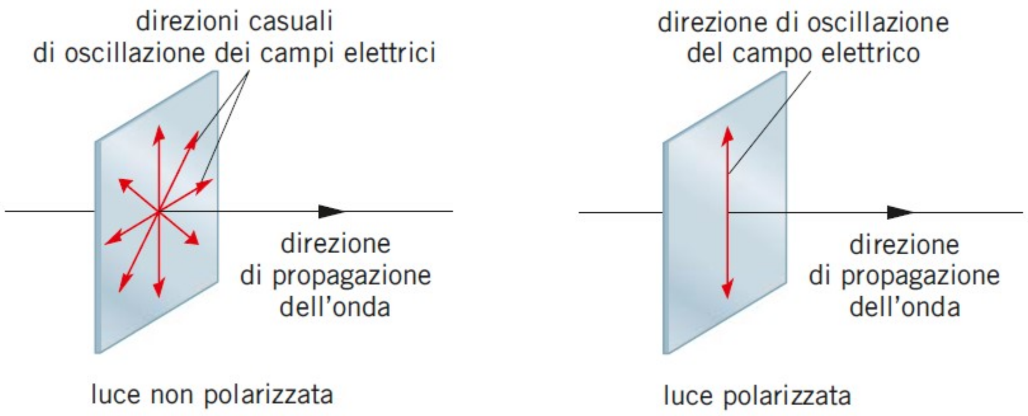
Polarizzazione circolare



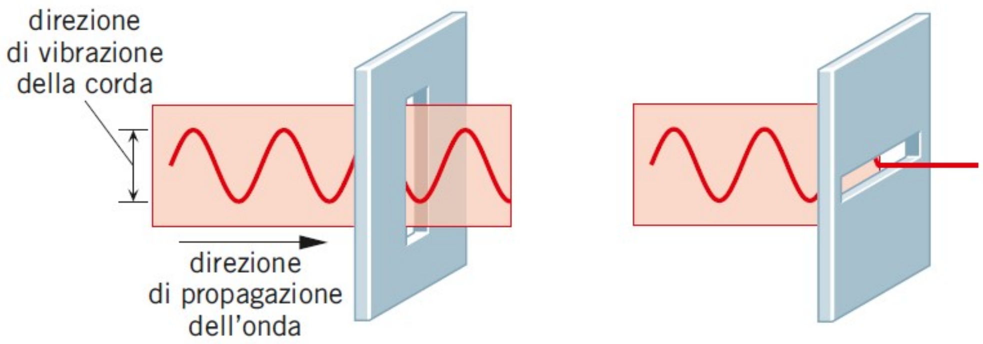
ZANICHELLI

Onda polarizzata linearmente

Un’onda trasversale è **polarizzata linearmente** se oscilla sempre nella stessa direzione.



La luce naturale è una sovrapposizione di onde polarizzate casualmente.

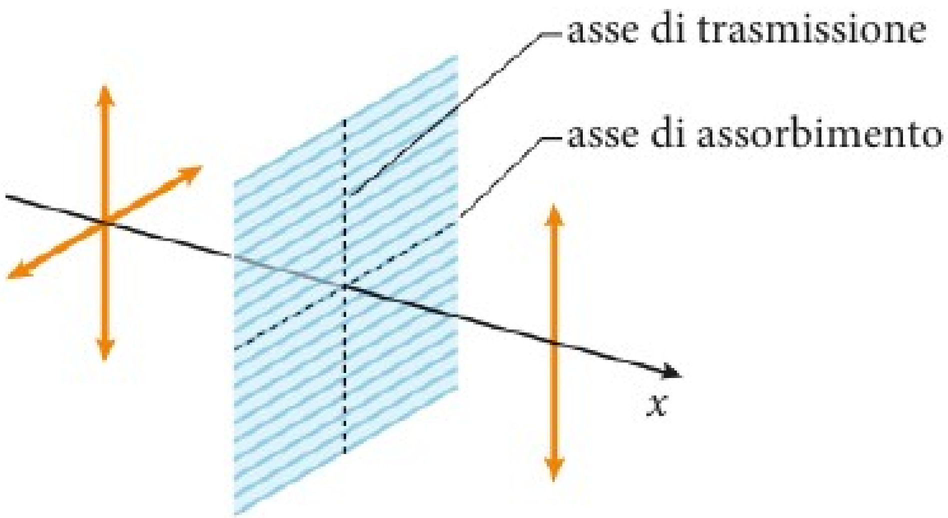


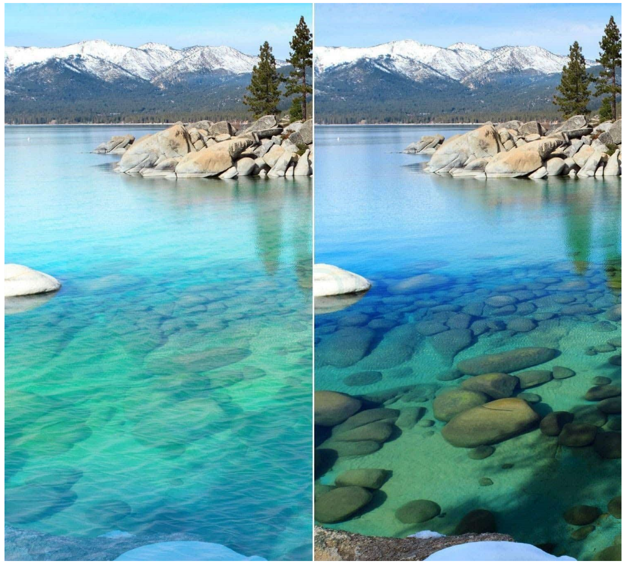
Un’onda linearmente polarizzata su una corda può attraversare una fenditura *parallela* alla direzione di vibrazione, ma non una fenditura *perpendicolare*.

Filtro Polarizzatore

Un filtro che lascia passare le onde luminose polarizzate linearmente in una certa direzione ma assorbe le altre è detto **polarizzatore lineare** o **filtro polaroid**.

I filtri polaroid sono ampiamente utilizzati in **fotografia** e nella produzione di **occhiali da sole**.





La luce che emerge da una lamina polaroid è *sempre* polarizzata linearmente lungo l'asse di trasmissione.

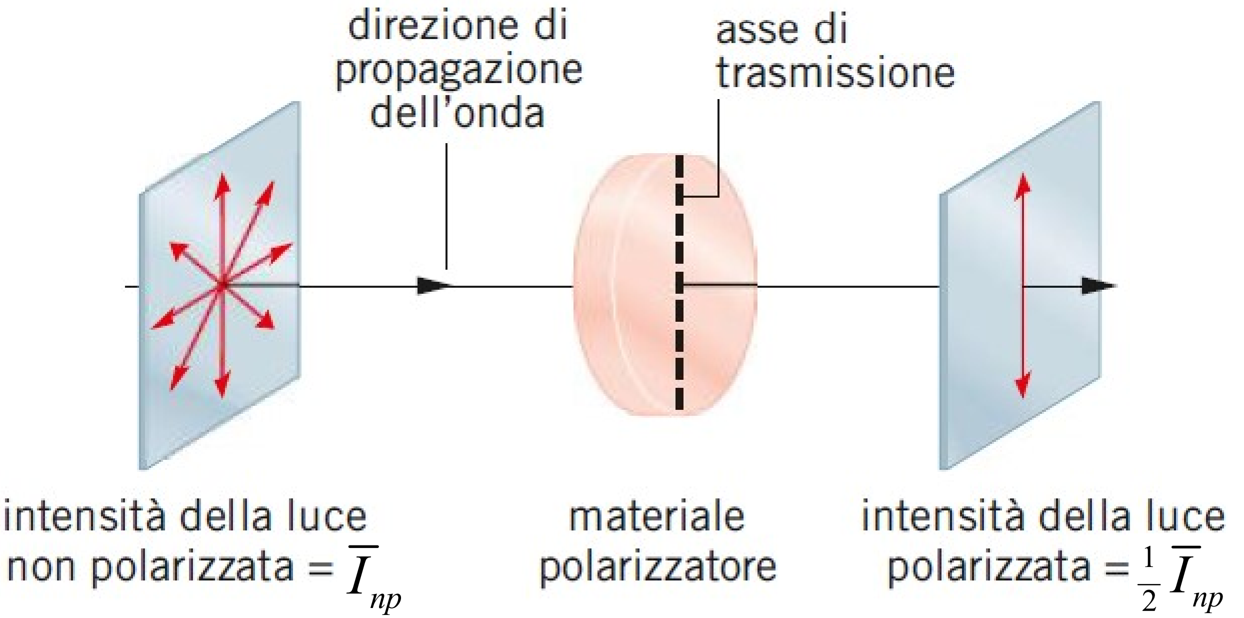
continua

I polarizzatori

La luce polarizzata può essere prodotta a partire da luce non polarizzata utilizzando particolari materiali.

Essi possono essere attraversati solo dalla componente del campo elettrico in una particolare direzione, mentre assorbono le componenti del campo perpendicolari a questa direzione.

L'intensità dell'onda uscente è la metà di quella dell'onda entrante.



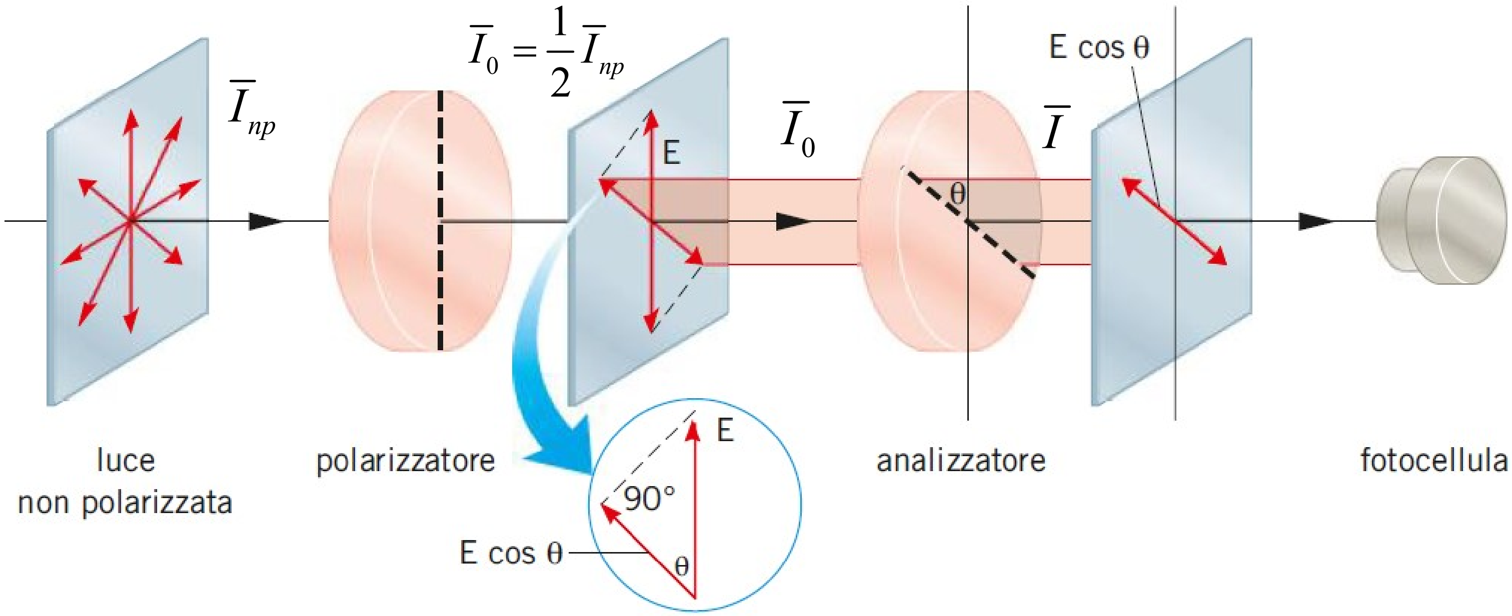
ZANICHELLI

Legge di Malus

L'**irradiamento medio** $\overline{I}$ della luce che esce dall'analizzatore è:

$$\overline{I} = \overline{I}_0 \cos^2(\theta)$$

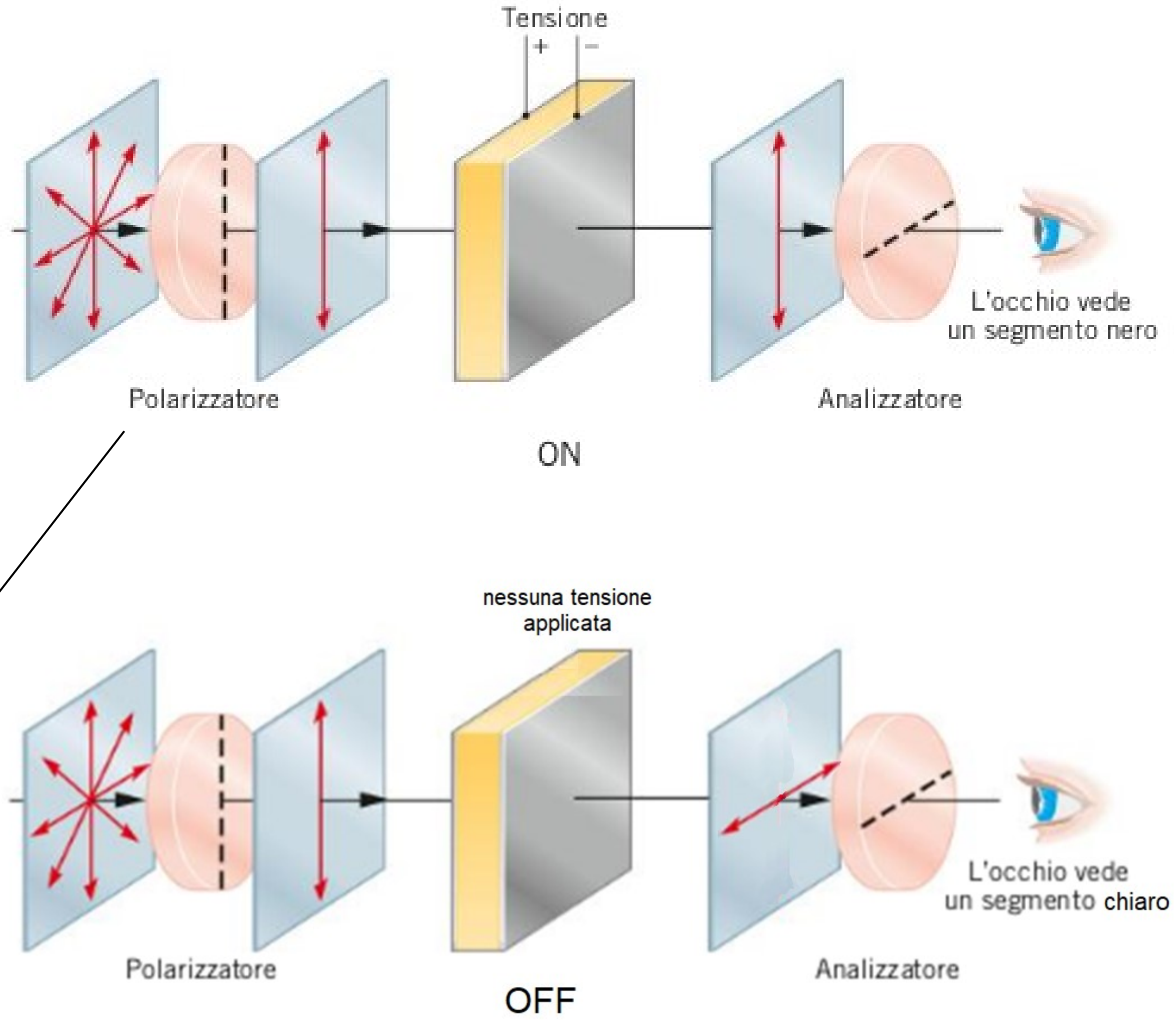
dove $\overline{I}_0$ è l'**irradiamento medio** della luce <u>già polarizzata</u> che entra nell'analizzatore, e θ è l'angolo tra le due direzioni di polarizzazione.

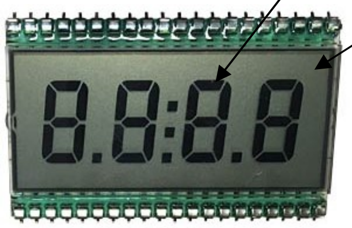


Approfondimento: i visori LCD

La luce incidente polarizzata linearmente:

- attraversa i cristalli liquidi «accesi» senza che sia modificata la direzione della sua polarizzazione;
- attraversa i cristalli liquidi «spenti» ruotando di 90° la direzione di polarizzazione.

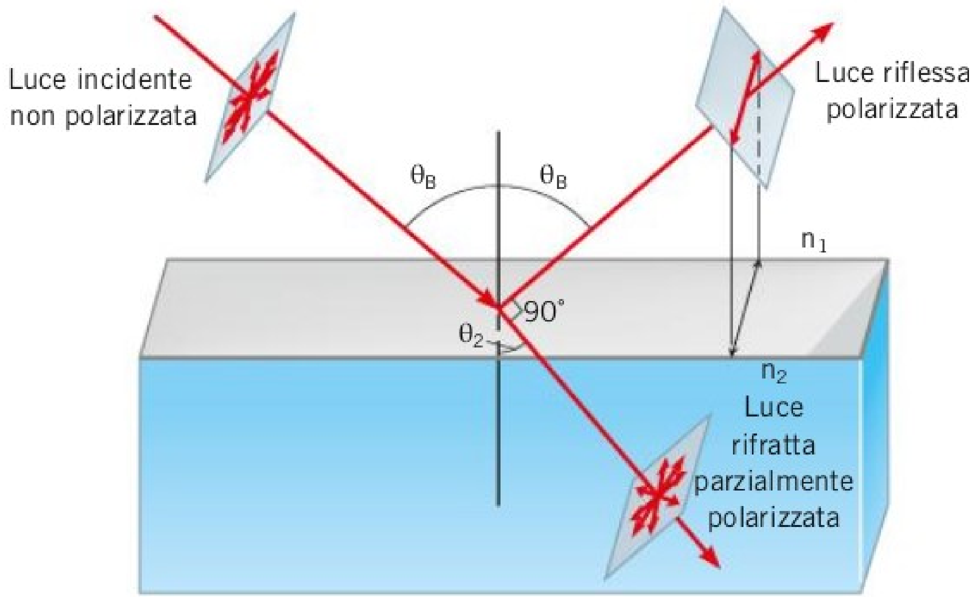




Polarizzazione per riflessione

Se un fascio di luce incide su una superficie non metallica con angolo d'incidenza diverso da zero, il fascio riflesso è parzialmente polarizzato nella direzione parallela alla superficie.

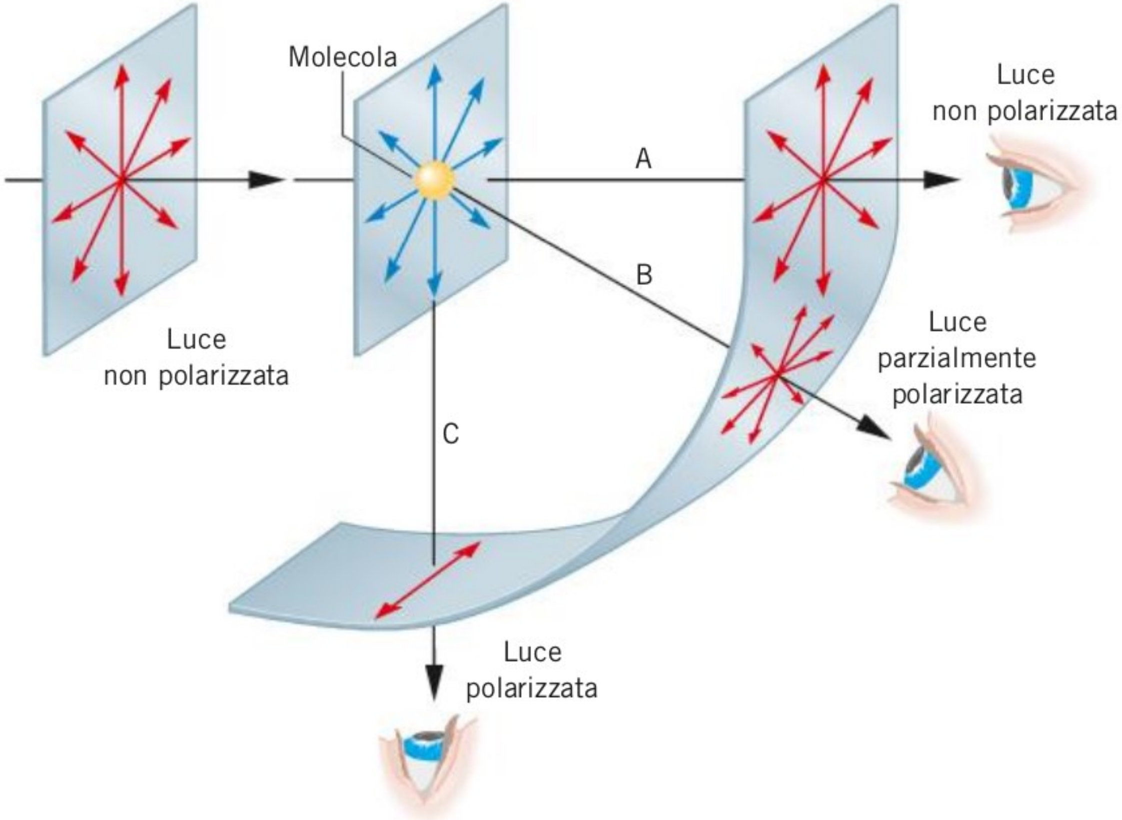
La luce riflessa è *totalmente polarizzata* per un particolare angolo di incidenza, detto **angolo di Brewster** θ_B:



$$\tan \theta_B = \frac{n_2}{n_1}$$

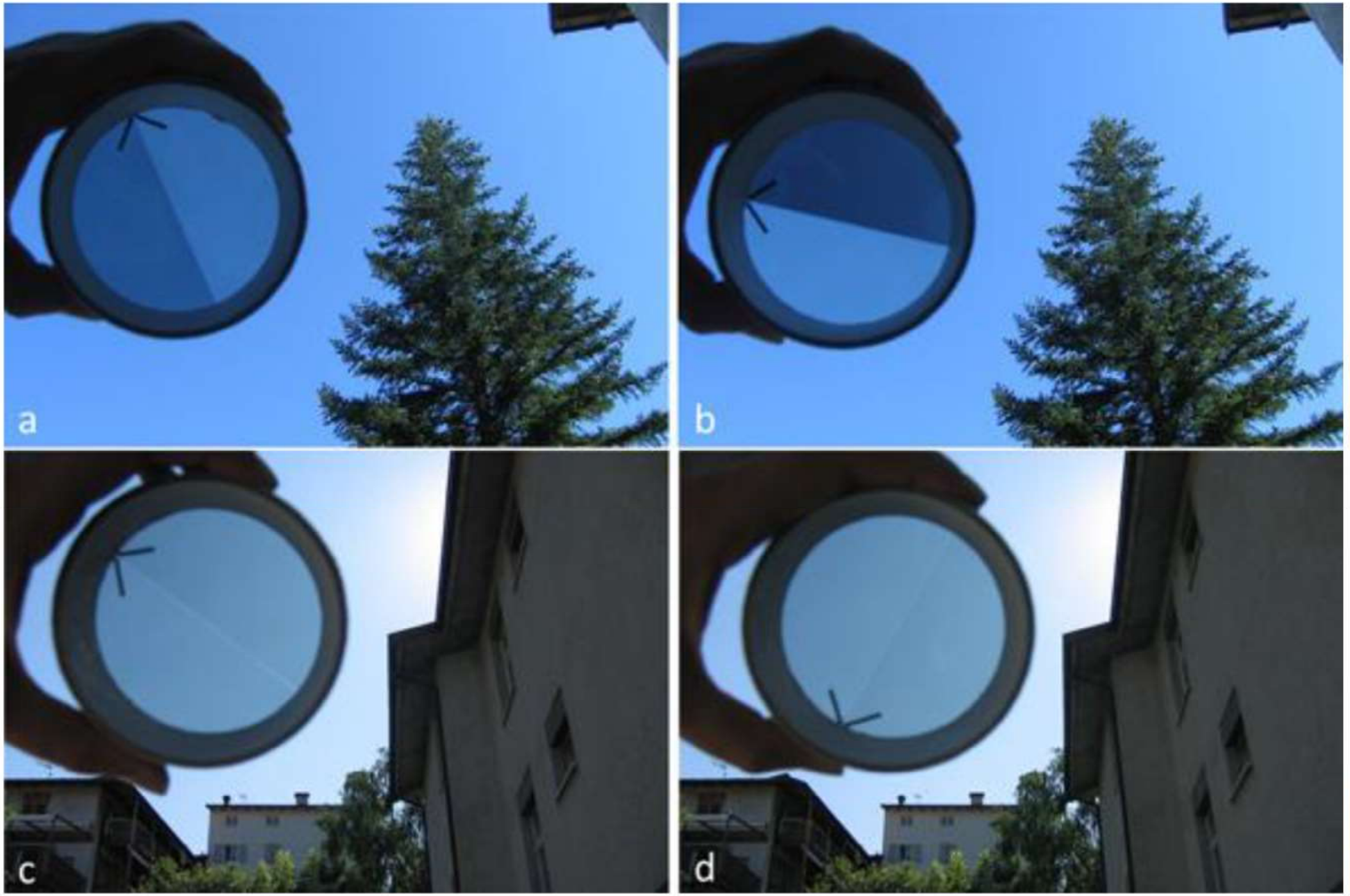
Polarizzazione per diffusione

La luce polarizzata ha origine anche dalla diffusione della luce da parte delle molecole dell'atmosfera.



La luce emessa in avanti è non polarizzata, come la luce incidente.

La luce C emessa perpendicolarmente alla direzione della luce incidente è polarizzata.



The polarization of the sky can be determined with a polarizing filter or a polariscope. At 90o degrees with respect to the rays of the sun, light results rather polarized (see (a) and (b) on the left). However, forward the sun, light is very little polarized (on the left (c) and (d)).

Preparazione della verifica

- Tipologie di esercizio inserite nella **prova di verifica**
  - 1 domanda di teoria sulle Equazioni di Maxwell
  - 1 esercizio con applicazione di FNL o TAM con le derivate
  - 1 esercizio sulle onde elettromagnetiche
  - 1 esercizio sulla polarizzazione
  - 1 esercizio simbolico sulla pressione di radiazione.

- Gli studenti hanno affrontato esercitazioni simili in preparazione alla prova di verifica.
- È stato analizzato il formulario preparato dal docente per rinforzare alcuni concetti teorici fondamentali (es: distinzione tra proprietà delle OEM nel vuoto e nella materia).

Esercizio 1 (Teoria)

Esercizio 1a (Teoria)

- Quali tra le 4 Equazioni di Maxwell descrivono due campi vorticosi?
- Dopo averle enunciate (mediante formula e in italiano), identifica la principale differenza tra le due equazioni. C'è una particolare condizione in cui i campi descritti da queste equazioni non sono vorticosi?

Risposta

- Le equazioni che descrivono campi vorticosi sono la Legge di Faraday-Neumann-Lenz (circuitazione di E) e il Teorema di Ampère-Maxwell (circuitazione di B):

$$\Gamma_\gamma(\vec{E}) = -\frac{d\Phi_S(\vec{B})}{dt} \qquad \Gamma_\gamma(\vec{B}) = \mu_0 I + \mu_0\varepsilon_0 \frac{d\Phi_S(\vec{E})}{dt}$$

  [Inserire qui enunciati in linguaggio naturale]
- Le circuitazioni sono diverse da zero quindi indicano campi vorticosi, ossia con linee del campo chiuse ad anello. Dalla legge di FNL si capisce che è possibile eliminare la vorticosità del campo elettrico quando non ci sono campi magnetici variabili nel tempo (in tal caso la circuitazione vale zero e, dato che le sorgenti del campo sono solo le cariche elettriche, allora le linee di E sono aperte). Non è possibile invece eliminare la vorticosità del campo magnetico: qualunque sia la sua sorgente (correnti o campi elettrici variabili), la circuitazione è sempre diversa da zero.

Esercizio 1 (Teoria)

Esercizio 1b (Teoria)

- Esiste una asimmetria tra le Equazioni di Maxwell 1 e 3, così come esiste una asimmetria tra le Equazioni 2 e 4. A cosa è dovuta la asimmetria tra le due equazioni 1 e 3 (=cosa manca)?
- Lavorando per analogia, riesci a capire cosa manca nella 2a equazione di Maxwell per avere piena simmetria con la 4a (pensa al legame tra Q della 1a equazione e I presente nella 4a)?

Risposta

- La asimmetria tra le equazioni 1 (Teorema di Gauss per E) e 3 (Teorema di Gauss per B) è dovuta al fatto che il flusso di E è diverso da zero perché E ha delle sorgenti puntiformi (le cariche elettriche Q), mentre il flusso di B è sempre zero perché non esistono sorgenti puntiformi del campo magnetico, i cosiddetti “monopoli magnetici” (se esistessero, le equazioni sarebbero simmetriche).
- Analogamente, nell’equazione 2 (Legge di Faraday-Neumann-Lenz per E) c’è solo la derivata nel tempo del flusso di B, mentre nell’equazione 4 (Teorema di Ampère-Maxwell) c’è la derivata nel tempo del flusso di E (termine simmetrico) ma in più c’è anche un termine dovuto alla corrente I, che manca invece nell’equazione 2. Ora, poiché I è una corrente di cariche elettriche, per simmetria quello che manca nell’equazione 2 sarebbe una “corrente monopolare” formata dal moto di monopoli magnetici. Se esistessero quindi i monopoli magnetici (e le correnti monopolari) allora le 4 equazioni di Maxwell sarebbero perfettamente simmetriche (vedi anche: https://it.wikipedia.org/wiki/Monopolo_magnetico#Equazioni_di_Maxwell_con_monopoli_magnetici)

Esercizio 2 (Equazioni di Maxwell e Derivate)

7 ★★★ **CON LE DERIVATE**

In una regione cilindrica dello spazio, di raggio 20 cm, è presente un campo magnetico uniforme parallelo all'asse, variabile nel tempo secondo la legge $B(t) = -k \cdot t$, con $k = 10\,\mathrm{T/s}$.

- ▶ Che accelerazione subisce un elettrone fermo posto a 10 cm dall'asse della regione?

[$8{,}8 \cdot 10^{10}\ \mathrm{m/s^2}$]

- Nel primo esercizio va calcolato il campo indotto (siamo nella regione interna) e poi va collegato all'accelerazione con la formula $e \cdot E = m \cdot a$.
- Nel secondo esercizio va ricordato il legame tra V ed E nei condensatori piani ($E = V/d$)

10 ★★ **CON LE DERIVATE**

In un condensatore a facce piane circolari, di raggio 2 mm e distanti 0,1 mm, la differenza di potenziale varia nel tempo secondo la relazione $V(t) = 60\, e^{-125t}$, con t espresso in secondi e V in Volt.

- ▶ Calcola il campo magnetico indotto a distanza di 1 mm e 3 mm dall'asse del condensatore all'istante $t = 2$ ms.

[$3{,}25 \cdot 10^{-13}$ T; $4{,}33 \cdot 10^{-13}$ T]

ERRORE TIPICO: In classe sono stati assegnati diversi esercizi con espressioni analitiche da derivare ben più complesse di queste. Purtroppo però in verifica vi sono stati diversi errori nel calcolo simbolico delle derivate (derivata del prodotto di $t^2 \exp(-k t^2)$)

Esercizio 3 (Onde elettromagnetiche)

Esercizio 3 (Onde Elettromagnetiche)

Il campo magnetico di un'onda elettromagnetica ha la seguente legge:

$$B = B_0 \sin(kx - \omega t)$$

con B_0=3,00·10^{-4} T, k=1,46·10^{7} m^{-1}, ω=3,21·10^{15} rad/s.

ERRORE TIPICO:
Utilizzare la relazione E=cB in un mezzo.

- Dimostra (col calcolo simbolico) che vale la cosiddetta *relazione di dispersione* per la velocità *v* dell'onda: $v = \omega / k$.
- Stabilisci se l'onda si sta propagando nel vuoto oppure in un mezzo materiale e, nel caso si trovi in un materiale, calcolane l'indice di rifrazione.
- Calcola il valore efficace del campo elettrico.
- Scrivi l'espressione del campo elettrico $E(x, t)$

[v=2,20·10^{8} m/s: non siamo nel vuoto, n=1,36; E_{eff} = v·B_{eff} = 46,7 kN/C]

Domande facoltative:

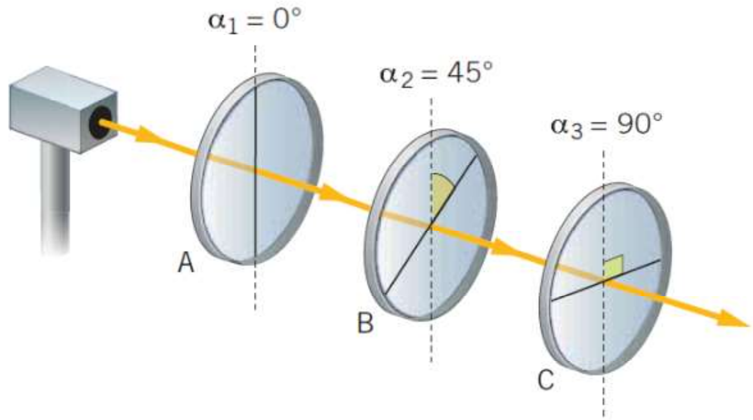
- Sapendo che si tratta di un materiale non magnetico (cosa vuol dire?), calcola la sua costante dielettrica (NB: negli esercizi abbiamo dimostrato la legge $n = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r}$)
- Calcola la densità di energia media trasportata dall'onda elettromagnetica.

[ε_r = 1,85; $\bar{u} = \varepsilon_r \varepsilon_0 E_{eff}^2$ = 0,036 J/m³]

Esercizio 4 (Polarizzazione)

Esercizio 4 (Polarizzazione)

Un laser produce un raggio di luce non polarizzata che incide su tre filtri polarizzatori lineari, come mostra la figura. L'irradiamento del raggio incidente sul primo polarizzatore vale 500 W/m².



- Determina il valore dell'irradiamento del raggio laser uscente dai polarizzatori *A, B, C*.
- Quale angolo dovrebbe formare con la verticale il polarizzatore *B* affinché la luce uscente dal polarizzatore *C* fosse nulla? (NB: ragiona senza fare calcoli)
- Determina l'angolo che dovrebbe formare con la verticale il polarizzatore *C* affinché la luce uscente da esso abbia intensità 100 W/m².

[250 W/m²; 125 W/m²; 62,5 W/m²; 0° oppure 90°; 71,56°]

ERRORE TIPICO: La difficoltà iniziale è capire che per due polarizzatori consecutivi l'intensità trasmessa dipende dall'**angolo relativo** tra due polarizzatori: $I_C = I_B \cos^2(\alpha_3 - \alpha_2)$. Ciononostante questo esercizio, privato delle ultime due richieste, è stato quello affrontato meglio da tutti gli studenti.

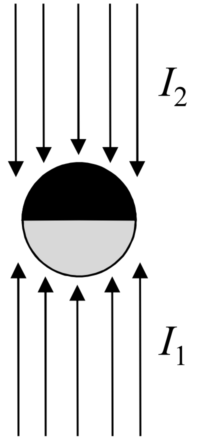
Esercizio 5 (Pressione di radiazione – simbolico)

Esercizio 5a (Simbolico, Pressione di Radiazione)

Due fasci laser di intensità I_1=3*I* e I_2=2*I*, diretti rispettivamente verso l'alto e verso il basso, vengono utilizzati per mantenere in equilibrio in sospensione una sferetta di raggio *R*, la cui metà inferiore è argentata, mentre la metà superiore è verniciata di nero (vedi figura a lato).

- Determina, in funzione dei parametri forniti, la massa *m* della sferetta.

$$\left[m = \frac{4\pi I R^2}{cg} \right]$$

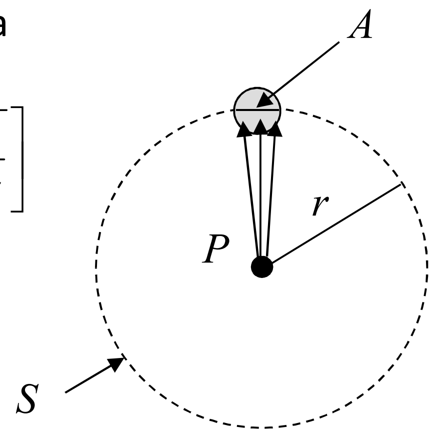


Esercizio 5b (Simbolico, Pressione di Radiazione)

Una sorgente puntiforme irradia luce in maniera isotropa con una potenza P. Una particella microscopica di argento, di forma sferica (densità d, raggio R), viene tenuta in sospensione dalla pressione di radiazione.

- Determina la distanza r tra la particella e la sorgente (supponi che valga la relazione r>>R e dunque che la luce incidente sulla particella sia formata da raggi paralleli).

$$\left[r = \sqrt{\frac{3P}{8\pi R d c g}} \right]$$

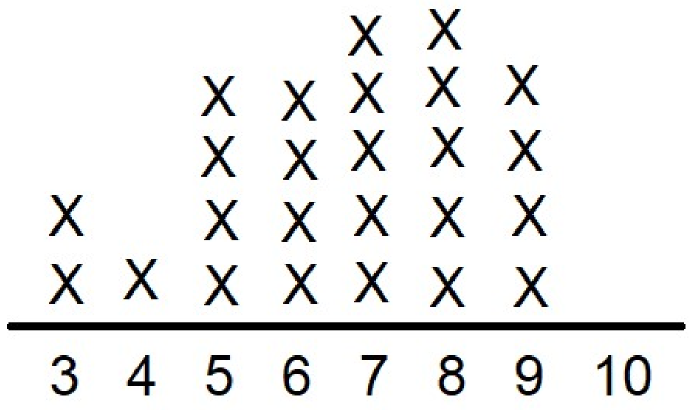


ERRORE TIPICO: non comprendere la differenza tra la superficie S (su cui l'onda emessa dalla sorgente si "diluisce") e la superficie A, ossia la porzione su cui l'onda effettivamente incide e su cui esercita una forza. In verifica quasi tutti hanno sbagliato questa tipologia di esercizio.

Esiti della prova di verifica

- La distribuzione dei voti ottenuta è quella osservata in figura a lato:

- Gli esercizi 3 e 4 sono stati svolti senza particolari difficoltà dagli studenti, a parte l'errore di usare *c* come velocità della luce in un mezzo materiale…



- Gli esercizi 2 e 5 sono quelli che hanno comportato maggiori difficoltà: il 5 è stato sbagliato da quasi tutti per via dell'incapacità di distinguere la superficie su cui si diluisce un'onda sferica e la superficie su cui essa esercita una pressione, e anche per difficoltà connesse alla gestione di molte grandezze simboliche; il 2 per via di significative difficoltà nel calcolo delle derivate che avrebbero dovuto essere ormai superate.

- Sebbene priva di eccellenze, in termini di valutazione media è risultata la prova con gli esiti migliori di tutto l'anno.