



Istruzioni Generali

- Si ricorda che per tutti i problemi occorre indicare sul cartellino delle risposte un numero intero compreso tra 0000 e 9999, o comunque una successione di 4 cifre. Si ricorda anche che occorre sempre e comunque compilare tutte le 4 cifre, eventualmente aggiungendo degli zeri iniziali.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, si indichi la sua parte intera. Si ricorda che la parte intera di un numero reale x è il più grande intero minore od uguale ad x .
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è un numero maggiore di 9999, oppure se non è univocamente determinata, si indichi 9999.
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:
 $\sqrt{3} = 1,7321$ $\sqrt{5} = 2,2361$ $\sqrt{11} = 3,3166$ $\pi = 3,1416$.

**E ORA
PER QUALCOSA DI
COMPLETAMENTE
DIVERSO...**

4 marzo 2016

Gara a Squadre – Testi dei problemi

1. Il primo dubbio di Tuono

(punti 20)

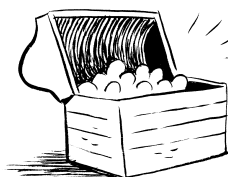


Quali sono i due numeri interi positivi che, moltiplicati tra loro, danno 2016 e, sottraendo il minore dal maggiore, si ottiene 20?

[Dare come risposta le prime quattro cifre dopo la virgola del rapporto tra il minore e il maggiore.]

2. I gioielli nello scrigno

(punti 20)



In uno scrigno vi sono 10000 gioielli, 5500 di questi sono verdi, mentre 4500 sono rossi; metà sono lisci, metà sono ruvidi. Quanti gioielli bisogna estrarre dallo scrigno per essere certi di aver estratto almeno un gioiello verde e liscio?

3. Igiene dentale

(punti 20)

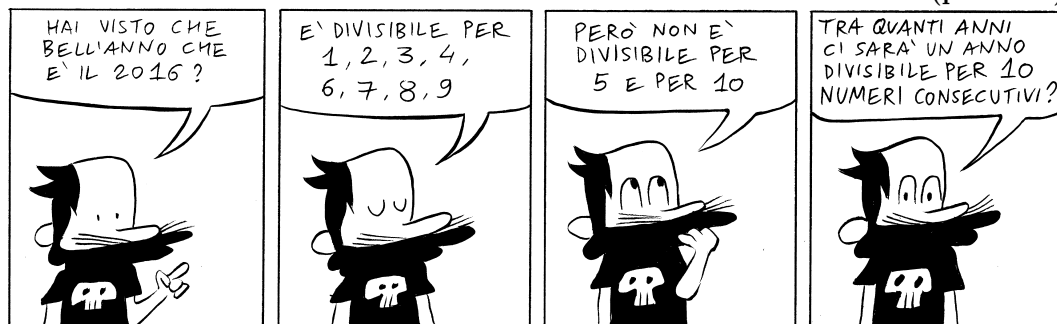


Di quanti cm^3 si deve far diminuire il volume per essere certi di far uscire 2 ml di fluido per lo spazzolino?

[Dare come risposta l'intero più vicino al risultato.]

4. Il secondo dubbio di Tuono

(punti 20)



5. *La sveglia*

(punti 30)

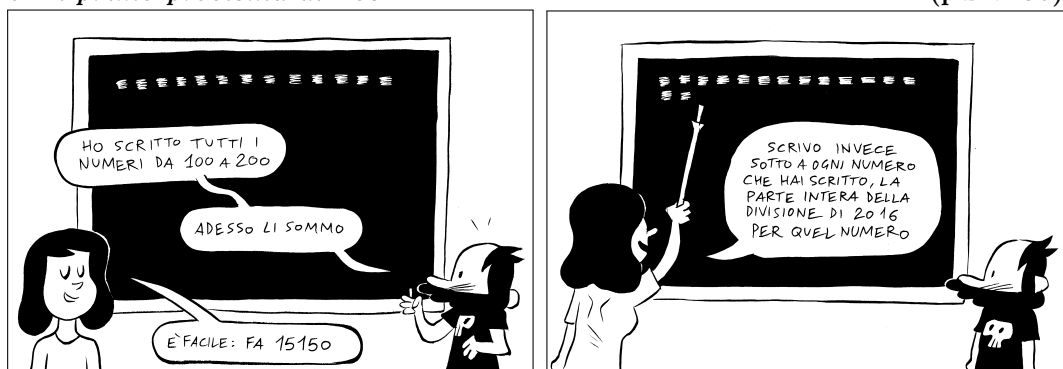


A partire dall'inizio dell'anno, qual è la prima scrittura $P_1P_2 : K_1K_2 : V_1V_2$ del T_1T_2/M_1M_1 in cui compaiono le dieci cifre?

[Dare come risposta $P_1P_2 + V_1V_2 \cdot T_1T_2 - K_1K_2 \cdot M_1M_2$.]

6. *Il primo problema di Zoe*

(punti 30)



Quanto fa la somma dei numeri scritti sulla riga inferiore?

7. *Il primo robot indaffarato*

(punti 30)

Su una scacchiera 20×16 , un piccolo robot è posizionato sulla prima casella più in basso a sinistra ed è rivolto verso la casella più in alto a sinistra, la sedicesima. Il robot si può muovere sulla scacchiera utilizzando le seguenti mosse

- (a) andare avanti di una casella nella direzione in cui è rivolto;
- (b) ruotare di 90° alla sua destra e andare avanti di una casella nella direzione in cui è rivolto dopo la rotazione.

Il robot può fare quante mosse vuole, ma non può uscire dalla scacchiera, non può ritornare su una casella già visitata e deve continuare ad eseguire la stessa mossa finché non gli è più possibile eseguirla per rispettare le altre regole. Quante sono le caselle su cui gli può capitare di passare, sempre partendo dalla prima casella più in basso a sinistra e rivolto verso la casella più in alto a sinistra?

8. La burocrazia perditempo

(punti 30)

River ha analizzato le regole che i 10000 sportelli, numerati da 1 a 10000, nel Palazzo della Burocrazia applicano per vidimare un modulo. Ha scoperto che ogni impiegato, quando una persona si presenta davanti al proprio sportello con un modulo da firmare, guarda nell'ordine un elenco di regole numerate ed effettua la prima che può essere effettivamente eseguita:

1. se $n \geq 300$ firma il modulo;
2. se n è divisibile per 5 non firma il modulo e manda la persona allo sportello n^2 ;
3. se n è divisibile per 3 non firma il modulo e manda la persona allo sportello $n + 100$;
4. se n è divisibile per 2 non firma il modulo e manda la persona allo sportello $n - 1$;
5. se n è divisibile per 11 non firma il modulo e manda la persona allo sportello pari alla somma delle cifre di n ;
6. firma il modulo.

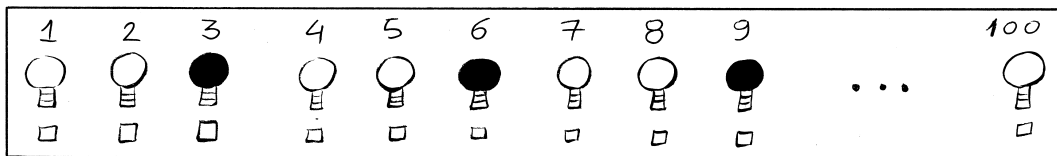
In particolare, se lo sportello a cui deve essere mandata la persona non esiste, firma il modulo. River determina da quale sportello inizia il giro che passa dal maggior numero di sportelli possibile prima di ottenere la firma sul modulo. Qual è il numero dello sportello determinato da River?

9. Il quadrante di Kaylee

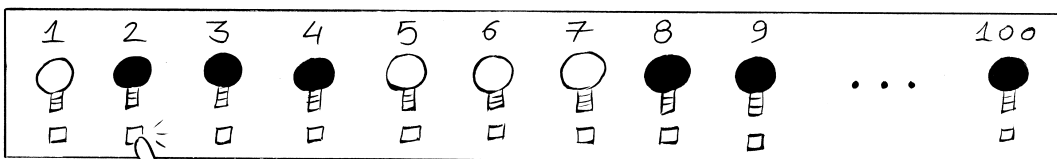
(punti 40)



UN SISTEMA ELETTRONICO MOSTRA UN QUADRANTE CON 100 LAMPADINE NUMERATE DA 1 A 100, CIASCUNA CON UN INTERRUTTORE IMMEDIATAMENTE ADIACENTE



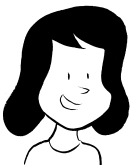
ATTIVANDO L'INTERRUTTORE ADIACENTE ALLA LAMPADINA K SI CAMBIA CONTEMPORANEAMENTE LO STATO (ACCESO/SPENTO) DI TUTTE LE LAMPADINE NUMERATE CON UN MULTIPLO DI K (K INCLUSO)



Kaylee si trova davanti al quadrante: le lampadine sono tutte accese, deve lasciare accese soltanto la prima e l'ultima lampadina. Qual è il numero minimo di attivazioni di interruttori che Kaylee deve fare?

10. Il secondo problema di Zoe

(punti 40)



Quanti interi positivi minori di 100 hanno la proprietà che il numero dei loro divisori interi positivi è uguale al prodotto delle loro cifre?

11. La festa a Lilac (punti 40)

Un operaio deve piazzare 2016 paletti per la festa nella grande piazza di Lilac secondo uno schema ben preciso. Incomincia fissando il paletto 1; si allontana dal paletto 1 di 1 m e fissa il paletto 2. A questo punto, con la schiena contro il paletto 2 ruota di 120° in senso antiorario rispetto alla direzione che aveva percorso dal paletto 1 al paletto 2 e fissa il paletto 3 dopo aver camminato per 2 m. Come prima, schiena al paletto 3, ruota di 120° in senso antiorario rispetto alla direzione dal paletto 2 al paletto 3, cammina per 3 m e fissa il paletto 4. Continua così finché non pianta a terra 2016 paletti. Quanto dista il paletto 1 dal paletto 2016?

12. Le piante di fagioli (punti 40)

Un contadino ha comprato da un membro dell'Alleanza una scatola di fagioli gialli. Ogni notte la pianta di fagiolo giallo cresce di $(1/n)$ m dove n è il numero di giorni passati dall'ultima volta che il terreno è stato concimato. La prima mattina il contadino semina un fagiolo e concima tutto il suo terreno, in accordo con la sua natura nella notte il fagiolo cresce di 1 m. In ognuna delle dieci mattine successive l'agricoltore farà una sola tra le seguenti due azioni: seminerà un nuovo fagiolo oppure concimerà tutto il suo terreno. All'alba del dodicesimo giorno, misura l'altezza di ogni sua piantina e ne calcola la somma in cm. Quanto vale, al massimo, tale somma?

13. Il terzo dubbio di Tuono (punti 40)



Considerato il polinomio $P(x)$ ottenuto facendo il prodotto dei 2016 polinomi

$$x + 1, \quad x^2 + 2, \quad \dots, \quad x^{2015} + 2015 \quad \text{e} \quad x^{2016} + 2016,$$

qual è il più piccolo intero positivo n tale che la somma dei coefficienti del polinomio $P(x)$ non è divisibile per n ?

14. Il circuito di Kaylee (punti 40)

Un circuito elettronico consiste di 2016 dispositivi messi in fila. Ciascuno di questi, eccetto il primo e l'ultimo, è collegato con il precedente e con il successivo; il primo viene collegato solo con il successivo, l'ultimo viene collegato solo con il precedente. C'è un pulsante che, quando viene premuto, fornisce energia al primo dispositivo della fila. I dispositivi si comportano rispettando le seguenti regole:

- Se un dispositivo si trova nello stato ON e riceve energia, cambia il suo stato in OFF e passa energia al successivo.
- Se un dispositivo si trova nello stato OFF e riceve energia, cambia il suo stato in ON e non trasmette corrente al successivo.
- Se non riceve energia, un dispositivo rimane nello stato in cui si trova.

Kaylee è davanti al circuito elettronico e tutti i 2016 dispositivi si trovano nello stato OFF. Kaylee ha tempo da perdere e, per farlo passare, preme il pulsante per 2016 volte. A quel punto quanti sono i dispositivi nello stato ON?

15. I codici di River (punti 40)

Indagando per scoprire il codice di accesso alla stanza di comando di Miranda, River ha dapprima scoperto che tale codice è collegato a due numeri interi positivi a e b e ad elenchi di numeri positivi ottenuti secondo le regole seguenti:

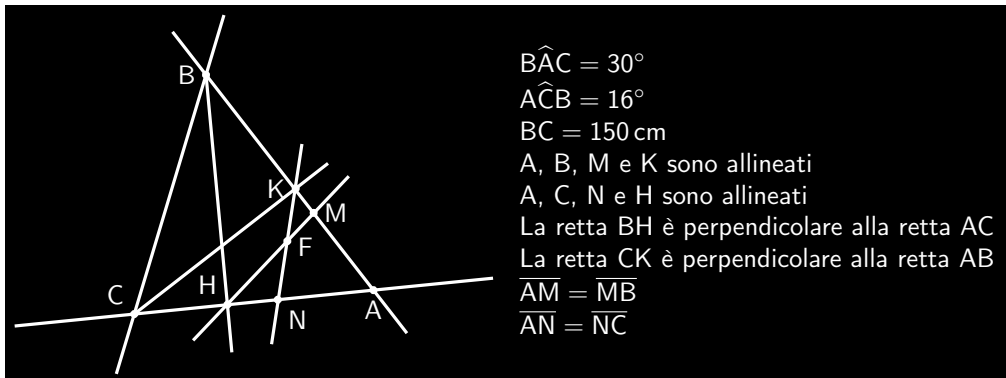
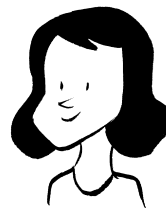
$$A_0 = a \quad A_1 = b \quad A_{n+2} = A_n - A_{n+1},$$

cioè, se A_k non è positivo, l'elenco termina e A_k non viene scritto. River ha anche scoperto che a è 2016 e b rende massimo il numero di termini dell'elenco. Quanto vale b ?

16. *Il terzo problema di Zoe*

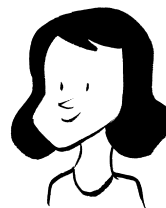
(punti 40)

CONSIDERA I DATI CHE HO SCRITTO SULLA LAVAGNA.
CHIAMA F IL PUNTO DI INTERSEZIONE DELLE
RETTE KN E HM .



IL DISEGNO È SBAGLIATO!
 \widehat{ACB} NON È DI 16° .

NON IMPORTA! I DISEGNI NON SERVONO IN
GEOMETRIA. QUANTO VALE IL RAPPORTO
DELL'AMPIEZZA DI \widehat{MFN} CON QUELLA DI \widehat{MHB} ?



[Dare come risposta il rapporto ottenuto moltiplicato per 1000.]

17. *Il dado truccato di River*

(punti 50)

River e Simon sono seduti a un tavolo, River ha in mano un dado a 6 facce, numerate da 1 a 6.

River Simon! Guarda che cosa ha regalato la mamma!

Simon Che cosa sarebbe? È un comunissimo dado a 6 facce.

River NO! Non è assolutamente comune.

Simon Cosa avrebbe di così stupefacente?

River È un dado truccato! Ho letto sulla scatola che lo conteneva che la probabilità che esca un numero dispari è tripla di quella che esca un numero pari, i numeri dispari escono con ugual probabilità tra loro, e così i numeri pari.

Simon Se ti diverti così... Fammelo usare. (*Prende il dado, lo lancia tre volte e segna i tre numeri usciti: 4, 5, 1.*)

Simon È uscito subito un numero pari e la somma dei tre numeri è 10, un numero pari... Secondo me è stata una grossa fregatura.

River Ti sbagli, hai assistito a qualcosa di straordinario. (*Scrive su un foglio le prime quattro cifre dopo la virgola della probabilità che, dopo tre lanci, la somma delle cifre faccia proprio 10.*)

[Dare come risposta quello che River ha scritto sul foglio.]

18. *Il quarto dubbio di Tuono*

(punti 50)

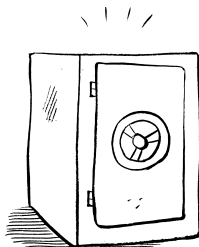


Valutato il numero n di funzioni $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tali che $f(x+y) + x \cdot y = f(x) \cdot f(y)$ per tutti gli x, y in \mathbb{R} , sia $F(x) = f_1(x) \cdot \dots \cdot f_n(x)$ il prodotto dei valori di tutte tali n funzioni calcolate sull'argomento x . Quali sono le quattro cifre prima della virgola di $|F(2016)|$?

19. *La cassaforte di Mal*

(punti 60)

(con la partecipazione straordinaria di Tuono nella parte di Book)



Una cassaforte viene protetta da un codice a 4 cifre non tutte uguali. Perché tale combinazione non venga persa, Mal consegna a tre persone informazioni fondamentali per recuperarla. A Jayne consegna la somma della terza e della quarta cifra. A Book consegna il prodotto della seconda e della quarta cifra e la somma tra la prima e la terza cifra. A Zoe consegna la somma della prima e della seconda cifra. Passato un po' di tempo senza mai scambiarsi informazioni, i tre si incontrano e si dicono

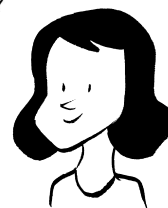
IO, JAYNE, CONOSCO LA TERZA E LA QUARTA CIFRA DELLA COMBINAZIONE



IO, BOOK, ORA CONOSCO TRE CIFRE E LA LORO POSIZIONE PRECISA, MA NON CONOSCO L'INTERA COMBINAZIONE



IO, ZOE, ORA CONOSCO LA COMBINAZIONE COMPLETA



Qual è il codice?

20. *Energia per Serenity*

(punti 60)

Un cubo è formato da 343 cubetti più piccoli, disposti in 7 piani da 49 cubetti ciascuno. Per poter estrarre un cubetto deve esistere un percorso libero dalla sua posizione fino all'esterno. Per fornire energia all'astronave Serenity, Mal deve estrarre esattamente 116 cubetti esponendo la superficie massima ottenibile. Quanti cm^2 vale tale superficie massima sapendo che il lato di ogni cubetto misura 1 cm?

21. *Il secondo robot indaffarato*

(punti 60)

Su una scacchiera 10×8 , un piccolo robot è posizionato sulla prima casella più in basso a sinistra ed è rivolto verso la casella più in alto a sinistra, l'ottava. Il robot si può muovere sulla scacchiera utilizzando le seguenti mosse

- (a) andare avanti di una casella nella direzione in cui è rivolto;
- (b) ruotare di 90° alla sua destra e andare avanti di una casella nella direzione in cui è rivolto.

Il robot può scegliere che mossa fare, ma non può uscire dalla scacchiera e non può ritornare su una casella già visitata. Si ferma soltanto quando non può più eseguire una mossa rispettando tutte le regole. Quanti sono i percorsi che può fare?

[Se il numero è superiore a 9999, dare come risposta le ultime quattro cifre del numero.]

22. La circonferenza di Wash

(punti 70)

Wash, per passare il tempo viaggiando nello spazio profondo, disegna una circonferenza di raggio 12 cm e disegna 4 punti A, B, C, D sulla circonferenza nel modo seguente. Fissato A , segna B in modo che AB sia lungo 9 cm; poi segna D dalla parte opposta a B rispetto ad A in modo che AD sia lungo quanto il raggio della circonferenza. A questo punto traccia l'altezza del triangolo ABD dal vertice A e indica con C il punto di intersezione dell'altezza con la circonferenza diverso da A . Qual è il rapporto tra la diagonale più corta e la diagonale più lunga del quadrilatero $ABCD$?

[Dare come risposta le prime quattro cifre dopo la virgola.]

23. Giocando a Tri

(punti 70)

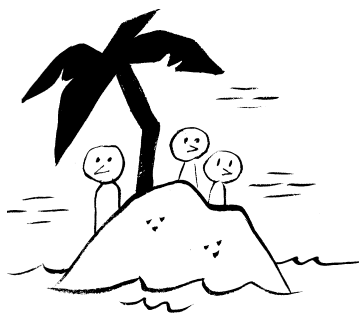
Mal e Inara giocano a Tri con un mazzo composto da tredici carte, di cui dieci sono numerate dall'1 al 10 e le altre tre sono figure. Nel gioco di Tri le carte numerate hanno il loro valore numerico, mentre le figure valgono 10. Il gioco si svolge come segue: Inara pesca una carta a caso dal mazzo, quindi Mal pesca a sua volta una carta a caso dalle rimanenti dodici. Se il valore della carta di Mal è divisibile per il valore della carta di Inara, Mal vince, altrimenti Mal pesca una nuova carta dalle rimanenti del mazzo. Se il prodotto delle due carte di Mal è divisibile per il valore della carta di Inara, Mal vince; si procede così finché Mal pesca la quinta carta; se anche con la quinta carta non ha vinto, Mal perde. Qual è la probabilità che Mal vinca?

[Dare come risposta le prime quattro cifre dopo la virgola del risultato.]

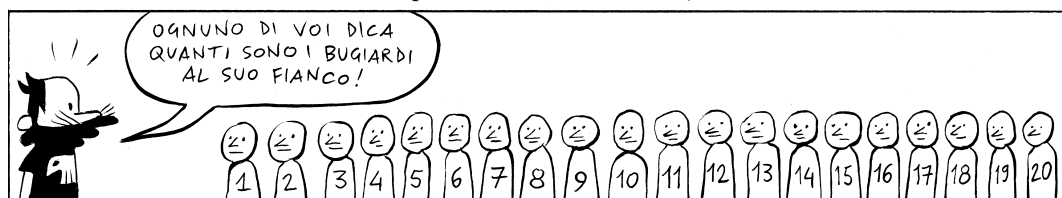
24. L'isola di Hol

(punti 70)

(con la partecipazione straordinaria di Tuono nella parte di Book)



I 20 abitanti della piccola isola di Hol sul pianeta Haven si dividono in tre tipologie. C'è la tipologia degli isolani sinceri che dicono sempre la verità, c'è la tipologia degli isolani bugiardi che dicono sempre il falso e c'è la tipologia degli isolani incerti che si adeguano ai modi di chi gli sta a destra, cioè un incerto dice il falso se l'isolano alla sua destra ha detto il falso, un isolano incerto dice il vero se l'isolano alla sua destra ha detto il vero, un isolano incerto non parla se, alla sua destra, non ha un isolano. Arrivato sul pianeta, Book visita l'isola di Hol, mette gli isolani in fila e appiccica un numero sul petto di ciascun isolano, in ordine da 1 fino a 20.



Iniziando da quello più vicino a Book, uno alla volta e seguendo l'ordine della fila, gli abitanti rispondono e curiosamente dicono tutti la stessa frase: «Esattamente uno.»

In base a queste risposte Book non è in grado di capire a quale tipologia appartiene ciascun abitante dell'isola, ma determina immediatamente tutte le configurazioni possibili in cui possono essere allineati isolani sinceri, isolani bugiardi e isolani incerti. Quante sono tali configurazioni?

[Una configurazione differisce da un'altra se nella prima c'è almeno un isolano che ha tipologia diversa da quella che lo stesso isolano ha nell'altra.]