



**Kangourou
Italia**



**UNIVERSITA' DEGLI
STUDI DI MODENA E
REGGIO EMILIA
Dipartimento di Fisica,
Informatica e Matematica**



**PIANO LAUREE
SCIENTIFICHE
Orientamento e
Formazione degli
Insegnanti**

6 dicembre 2012

Gara a squadre di matematica per le scuole medie

Istruzioni

- le risposte ai problemi sono dei numeri interi compresi tra 0 e 9999.
- se il risultato di un problema dovesse essere più grande di 9999 scrivere come soluzione 9999.
- se il risultato è un numero negativo scrivere come soluzione 0000.
- se il problema è impossibile scrivere 0000.
- se la soluzione non è un numero intero scrivere come soluzione il numero trovato senza la parte decimale (ad esempio, se la soluzione fosse 3224,75 scrivete 3224), **a meno che nel testo del problema non si diano indicazioni diverse.**
- Se servissero, usare le seguenti approssimazioni:

$$\sqrt{2} = 1,414 \quad ; \quad \sqrt{3} = 1,732 \quad ; \quad \sqrt{8} = 2,818 \quad ; \quad \pi = 3,142$$

Gara a squadre di matematica per le scuole medie 6 dicembre 2012

1. Quanti addendi [1007]

Quanto vale la somma $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots + 2011 - 2012 + 2013$?

Scriviamo l'espressione al contrario e con qualche parentesi:

$$(2013 - 2012) + (2011 - 2010) + \dots + (3 - 2) + 1 = (1006) + 1 = 1007$$

2. Le arance invendute [7719]

All'ortomercato c'era una partita di arance: dopo un'offerta promozionale ne sono rimaste invendute 581 che costituiscono il 7% di quelle inizialmente disponibili. Quante ne sono state vendute?

Se 581 arance sono il 7% delle arance iniziali, allora l'1% è $581 : 7 = 83$ arance. Quindi le arance erano 8300 e ne sono state vendute $8300 - 581$

3. Una differenza di interi [8853]

Qual è la differenza fra il più grande numero di quattro cifre tutte diverse fra loro e il più piccolo numero di quattro cifre tutte diverse fra loro?

Il più grande numero di quattro cifre tutte diverse fra loro è 9876 e il più piccolo numero di quattro cifre tutte diverse fra loro è 1023

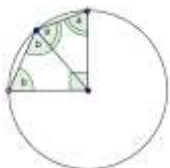
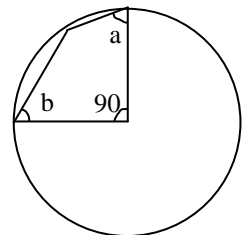
4. Il numero centrale [0280]

Quale numero è equidistante da $1/4$ e da $1/10$? (Esprimete il numero come una frazione fra interi positivi ridotta ai minimi termini; scrivete come risultato il prodotto tra il numeratore ed il denominatore.)

Il numero cercato è la media tra $1/4$ e $1/10$, cioè $(1/4 + 1/10) : 2 = 7/40$

5. I due angoli [0135]

Osservate la figura: quanto vale la somma delle misure, in gradi, degli angoli a e b , se l'angolo avente il vertice nel centro della circonferenza è retto?



Se nella figura tracciamo un raggio otteniamo due triangoli isosceli.

La somma delle misure di tutti gli angoli dei due triangoli vale 360 gradi.

Questa somma, però, vale anche $90 + a + a + b + b$. Quindi $a + a + b + b = 270$

6. Solo 8 e 9**[0010]**

Quante cifre ha il più piccolo numero intero, multiplo sia di 8 sia di 9, che si scrive utilizzando unicamente le cifre 8 e 9, ciascuna almeno una volta?

Un numero è multiplo di 8 se il numero dato dalle sue ultime tre cifre è multiplo di 8. Poiché 898, 988, 998 non sono divisibili per 8, allora il numero che cerchiamo deve finire con ...888. Siccome il nostro numero deve avere almeno una cifra 9 e deve essere il più piccolo possibile, allora è meglio che la cifra 9 la mettiamo più a destra che si può. Quindi il nostro numero dovrebbe terminare con ...9888. Adesso basta che aggiungiamo davanti al nove tanti 8 quanti ne servono affinché il numero diventi divisibile per 9: ne servono 6. Il numero è allora 8888889888. Ricordate che un numero è divisibile per 9 solo quando la somma delle sue cifre è divisibile per 9.

7. Cifre crescenti**[4578]**

Considerate i numeri interi positivi di 4 cifre tali che, in ognuno di essi, le cifre siano crescenti da sinistra verso destra (ad esempio 1234 o 2467 sono accettabili, mentre 2245 o 6579 non lo sono). Fra questi numeri, scegliete ora solo quelli divisibili per 6. Qual è il più grande fra questi ultimi?

I numeri divisibili per 6 sono i numeri pari che sono multipli di 3, cioè i numeri pari che hanno la somma delle cifre che è divisibile per 3. Il numero più grande può solo finire con la cifra 8 e, poiché 5678 non è un multiplo di 3, con qualche tentativo si vede che è 4578

8. Treni giapponesi**[0003]**

Sulla linea ferroviaria Tokyo-Osaka, durante tutta la giornata parte da Tokyo un treno rapido ogni 20 minuti che effettua l'intero percorso in 3 ore. Sulla stessa linea parte da Tokyo, sempre per Osaka e sempre ogni 20 minuti durante tutta la giornata, anche un diretto che effettua l'intero percorso in 4 ore e 10 minuti. Ieri i treni erano molto affollati e un viaggiatore che ha perso per un soffio il diretto delle 9,35 è riuscito a trovare un posto libero solo sul rapido delle 10,10. Durante il suo tragitto, quanti diretti ha sorpassato? (I treni giapponesi viaggiano sempre perfettamente in orario)

Il treno delle 10,10 arriva a destinazione alle 13,10. I treni che lui sorpassa sono quelli che sono partiti prima di lui e che arrivano dopo. I diretti prima delle 10,10 sono partiti alle 9,55 (arriva alle 14,05 e viene sorpassato), alle 9,35 (arriva alle 13,45 e viene sorpassato), alle 9,15 (arriva alle 13,25 e viene sorpassato). Il diretto delle 8,55 arriva alle 13,05 e non viene sorpassato, così come quelli che sono partiti ancora prima.

9. L'auto che consuma di più**[0078]**

Una casa automobilistica produce 10 diversi tipi di automobili a benzina. Il primo modello, quello più ecologico, è quello che consuma meno. Rispetto al modello più ecologico, il secondo modello consuma il doppio, il terzo consuma il triplo,... e così via fino al decimo modello che consuma dieci volte di più. Se per compiere uno stesso percorso usando un'auto per ogni tipo, sono stati consumati complessivamente 429 litri di benzina, quanti litri di benzina ha consumato l'auto che consuma di più?

Quando l'auto più ecologica consuma un litro di benzina, la seconda ne consuma due, la terza tre... così le auto, tutte insieme, consumano $1 + 2 + 3 + \dots + 10 = 55$ litri di benzina. Perciò se la prima auto consuma una certa quantità di benzina, tutte le auto insieme consumano 55 volte

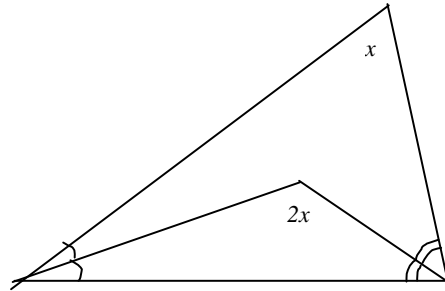
quella quantità. Se le auto hanno consumato 429 litri, l'auto che consuma meno ha consumato $429 : 55 = 7,8$ litri di benzina.

L'auto più potente ha consumato 10 volte di più, cioè 78 litri.

10. Le bisettrici

[0060]

In figura è disegnato un triangolo in cui sono state tracciate le bisettrici di due degli angoli. L'angolo formato da queste bisettrici è il doppio del terzo angolo. Quanto misura in gradi il terzo angolo x ? Rispondete 0000 se ritenete che i dati del problema siano insufficienti.



Nel triangolo più interno abbiamo un angolo segnato con un trattino, uno segnato con due trattini e un angolo che misura il doppio di una certa quantità x . La somma delle misure di questi angoli è 180 gradi.

Quando passiamo al triangolo più grande perdiamo una x , ma aggiungiamo un angolo segnato con un trattino ed uno con due trattini. Siccome la somma fa sempre 180 gradi, bisogna che x sia uguale alla somma delle misure di un angolo con un trattino di uno con due trattini. Tenendo conto di questo e guardando sempre il triangolo grande, possiamo dire che la somma delle misure di tre angoli con un trattino e tre angoli con due trattini fa 180 gradi.

Quindi un angolo con un trattino più uno con due (cioè x) vale 60 gradi.

11. Numeri palindromi

[0300]

Un numero intero positivo si dice *palindromo* se è uguale al numero che si ottiene leggendo le sue cifre da destra a sinistra (come, ad esempio, 91219). Quanti sono i numeri palindromi di sei cifre che sono divisibili per 3?

Un numero palindromo di sei cifre è divisibile per 3 se e solo se il numero formato dalle sue prime tre cifre è divisibile per 3 (come mai?). Per costruire i numeri palindromi di sei cifre possiamo prendere un qualsiasi numero di tre cifre (cioè un numero compreso tra 100 e 999) e poi scrivergli in coda lo stesso numero rovesciato. I numeri tra 100 e 999 sono 900 e di questi esattamente uno ogni tre, cioè 300, sono multipli di 3. Solo i numeri palindromi costruiti a partire da questi 300 numeri sono anch'essi multipli di 3.

12. La torta**[0016]**

Una torta tonda viene divisa in tanti pezzi con cinque tagli rettilinei. Se i tagli sono tutti verticali, quanti pezzi si possono ottenere al massimo? (I pezzi non devono necessariamente essere uguali fra loro.)

In questo problema la torta va pensata in tre dimensioni, quindi i tagli verticali sono i tagli che di solito si usano per suddividerla in pezzi, mentre quelli orizzontali sono quelli che useremmo se la volessimo farcire. Per avere tanti pezzi bisogna fare i tagli in modo che ciascun taglio intersechi il maggior numero possibile dei tagli fatti in precedenza (quindi bisogna evitare assolutamente di fare tagli paralleli tra loro!). Nella figura seguente si riesce ad ottenere una suddivisione in 16 pezzi (e non è possibile fare di meglio).

In realtà se si potessero sovrapporre i pezzi una volta tagliati, la torta potrebbe essere suddivisa in più di 16 pezzi (quanti?).

**13. La vincita al lotto****[1425]**

Tre amici hanno vinto una somma al lotto e decidono di suddividerla nel modo seguente: Andrea ne prende un terzo, aumentato di 200 euro; Bernardo un terzo di quello che resta, aumentato di 200 euro; Claudio il rimanente. La cifra che prende Claudio è esattamente un terzo del rimanente, aumentato di 200 euro. Qual è il valore iniziale (in euro) della vincita?

Siccome Claudio ha preso tutto quel che rimaneva, cioè tre terzi, allora 200 euro devono essere uguali a due terzi di quel che gli amici gli avevano lasciato. Quindi gli amici gli hanno lasciato 300 euro.

La cifra lasciata da Andrea si ottiene aggiungendo i soldi presi da Bernardo a questi 300 euro. Questa cifra è allora uguale a 300 euro più 200 euro più un terzo di se stessa.

Quindi $300 + 200 = 500$ euro è uguale ai due terzi della cifra lasciata da Andrea, cioè Andrea ha lasciato 750 euro. La cifra iniziale è allora uguale a questi 750 euro più quello che ha preso Andrea. Siccome Andrea ha preso 200 euro più un terzo del totale, bisogna che $750 + 200 = 950$ euro sia uguale a due terzi del totale. Il totale è 1425.

14. Una pallina speciale**[0182]**

Mario ha una pallina sferica speciale: ogni volta che cade sul pavimento, rimbalza verticalmente raggiungendo con il suo punto più basso esattamente la metà dell'altezza a cui si trovava il suo centro quando aveva iniziato la caduta. La pallina, il cui raggio misura 4 centimetri, è indeformabile, quindi rimane sempre perfettamente sferica ad ogni rimbalzo. Se inizialmente cade quando il suo centro è ad un'altezza di 64 centimetri dal pavimento, quanti centimetri avrà percorso il suo centro quando la pallina toccherà il pavimento per la quarta volta?

Dopo il primo rimbalzo il punto più basso della pallina sale a 32 cm ed il centro a 36 cm. Dopo il secondo rimbalzo il punto più basso sale a 18 cm ed il centro a 22 cm. Dopo il terzo rimbalzo il punto più basso sale a 11 cm ed il centro a 15. Quel che succede dopo il quarto rimbalzo non ci interessa più. Attenzione che il centro non scende fino a terra ma si ferma a 4 cm di altezza.

Il suo percorso è allora di

$$(64 - 4) + 2 \times (36 - 4) + 2 \times (22 - 4) + 2 \times (15 - 4) = 182 \text{ cm.}$$

15. In pasticceria**[0002]**

In una pasticceria sono in vendita torte, pasticcini e cioccolata. Oggi sono entrati 19 clienti: ciascuno di essi ha acquistato almeno un prodotto, ma nessuno ha acquistato tutti e tre i prodotti. A fine giornata la cassiera rileva che 17 clienti hanno acquistato torte, 13 hanno acquistato pasticcini e 8 hanno acquistato cioccolata. Quanti clienti hanno acquistato sia pasticcini sia cioccolata?

Poiché $17 + 13 + 8 = 38 = 19 \times 2$ e nessun cliente ha comprato prodotti di tutti e tre i tipi, bisogna che ogni cliente abbia comprato prodotti di esattamente due tipi. Quindi tutti quelli che non hanno comprato torte devono aver comprato sia pasticcini che cioccolata.

16. La rana**[0013]**

Una rana vuole salire una scala di 6 gradini, sempre salendo di uno o due gradini ad ogni salto. In quanti modi diversi può salire la scala?

La rana potrebbe fare solo tre salti da 2 gradini, oppure due salti da 2 e due da 1, oppure un salto da due e quattro da 1, oppure sei salti da 1. Bisogna però guardare anche in quale ordine fa i salti.

Le possibili sequenze di salti sono le seguenti:

Tre salti da 2. C'è un solo modo:

2, 2, 2

Due salti da 2 e due da 1. Ci sono 6 modi:

2, 2, 1, 1 oppure 2,1, 2, 1 oppure 2, 1, 1, 2 oppure 1, 2, 2, 1 oppure 1, 2, 1, 2 oppure 1, 1, 2, 2

Un salto da 2 e quattro da 1. Ci sono 5 modi:

2, 1, 1, 1, 1 oppure 1, 2, 1, 1, 1 oppure 1, 1, 2, 1, 1 oppure 1, 1, 1, 2, 1 oppure 1, 1, 1, 1, 2

Sei salti da 1. C'è un solo modo.

Quindi la rana può salire in $1 + 6 + 5 + 1 = 13$ modi diversi.

17. La griglia magica**[0840]**

Nella tabella seguente, riuscite a sostituire alle lettere i numeri interi che vanno da 1 a 9, utilizzati una e una sola volta, in modo che i sei prodotti dei tre numeri di ciascuna riga e di ciascuna colonna siano uguali ai valori indicati? Scrivete come risultato il prodotto dei cinque numeri che avete scritto nelle caselle delle due diagonali (cioè quelle con le lettere a, c, e, g, i).

a	b	c	84
d	e	f	16
g	h	i	270
40	27	336	

Siccome 270 e 40 sono gli unici numeri divisibili per 5, si deve avere che $g = 5$.

Allo stesso modo c deve essere 7, perché solo 84 e 336 sono divisibili per 7.

I divisori di 27 sono tutti dispari, mentre l'unico divisore dispari di 16 è 1, quindi $e=1$.

Continuando così, oppure andando per tentativi, si ottiene che la griglia è fatta così:

4	3	7	84
2	1	8	16
5	9	6	270
40	27	336	

18. Quattro radici quadrate [0104]

Calcolate: $\sqrt{1+105 \cdot \sqrt{1+104 \cdot \sqrt{1+103 \cdot \sqrt{1+100 \cdot 102}}}}$

Bisogna cominciare a calcolare le radici più interne

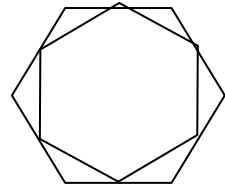
$100 \times 102 + 1 = 10201$. Se questo è un quadrato perfetto dovrebbe essere il quadrato di un numero compreso tra 100 e 102, quindi di 101. Tanto vale tentare. In effetti: $10201 = 101^2$.

Quindi la radice più interna vale 101. Si ha poi che $101 \times 103 + 1 = 10401 = 102^2$.

Inoltre $102 \times 104 + 1 = 10601 = 103^2$ e $103 \times 105 + 1 = 10801 = 104^2$. Il risultato finale è 104.

19. I due esagoni [0015]

In figura vedete due esagoni: l'area di quello esterno è 20 cm^2 , i vertici di quello interno sono i punti medi dei lati di quello esterno. Quanti cm^2 misura l'area di quello interno? Se il risultato non è intero indicate come risposta il numero intero più vicino (per difetto o per eccesso).

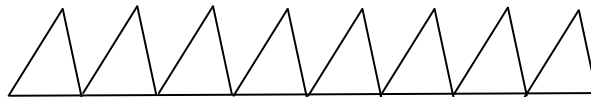


Se un esagono ha i lati 3 volte più lunghi di quelli di un altro esagono, la sua area è 3^2 volte più grande. Questo, in realtà, vale anche se al posto del 3 ci si mette qualunque altro numero. Veniamo al nostro problema: se congiungiamo tutti i vertici dei due esagoni con il centro otteniamo tanti triangoli equilateri. Guardandoli, ci si accorge che il lato dell'esagono piccolo è uguale all'altezza del triangolo equilatero che ha come lato lo stesso lato dell'esagono grande. Quindi il lato dell'esagono piccolo è uguale al lato dell'esagono grande per radice di tre diviso due.

Allora l'area dell'esagono piccolo è uguale all'area dell'esagono grande moltiplicata per il quadrato di questo numero, cioè $\frac{3}{4}$. Perciò il risultato è $20 \times \frac{3}{4} = 15$ centimetri quadrati.

20. Trovate l'area [0023]

Otto triangoli, tutti uguali, sono disposti come in figura. La lunghezza di ogni lato dei triangoli è espressa da un numero intero di centimetri e il perimetro dell'intera figura misura 64 centimetri. Quanto misura l'area della figura? Indicate il numero intero più vicino (per difetto o per eccesso) al valore esatto dell'area se ritenete che i dati del problema siano sufficienti per determinarlo, scrivete 0000 in caso contrario.



Il perimetro di ogni triangolo è di 8 cm. I lati dei triangoli sono allora tre numeri interi la cui somma vale 8. Ci sono molte possibilità di ottenere 8 come somma di tre interi, ma solo 3, 3 e 2 possono essere i lati di un triangolo (ad esempio, non esistono triangoli con i lati lunghi 5, 2 ed 1 oppure, 4, 2 e 2). Allora il nostro problema è ora quello di calcolare l'area di un triangolo che ha i lati lunghi 3, 3 e 2, quindi un triangolo isoscele. Se prendiamo come base il lato lungo 2 e usiamo il teorema di Pitagora, otteniamo che l'altezza è uguale alla radice di 8, cioè a $2,828$. Facendo i calcoli, cioè, 8 (il numero dei triangoli) $\times 2$ (la misura della base) $\times 2,828$ (l'altezza dei triangoli) : 2 (perché lo dice la formula dell'area) si ottiene $22,624$ centimetri quadrati.