



**ISTITUTO TECNICO  
INDUSTRIALE STATALE  
"A. VOLTA"  
Sassuolo**



**UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI  
MODENA E REGGIO EMILIA  
Dipartimento di Matematica  
Pura ed Applicata "G. Vitali"**



**PIANO LAUREE  
SCIENTIFICHE  
Orientamento e Formazione  
degli Insegnanti  
- MATEMATICA -**



**ISTITUTO DI ISTRUZIONE  
SUPERIORE  
"A. F. FORMIGGINI"  
Sassuolo**

## 19 Maggio 2011

### Gara a squadre di matematica per le scuole medie

#### Istruzioni

- le risposte ai problemi sono dei numeri interi compresi tra 0 e 9999.
- se il risultato di un problema dovesse essere più grande di 9999 scrivere come soluzione 9999.
- se il risultato è un numero negativo scrivere come soluzione 0000.
- se il problema è impossibile scrivere 0000.
- se la soluzione non è un numero intero scrivere come soluzione il numero trovato senza la parte decimale (ad esempio, se la soluzione fosse 3224,75 scrivete 3224).
- Se servissero, usare le seguenti approssimazioni:

$$\sqrt{2} = 1,4142 \quad ; \quad \sqrt{3} = 1,7321 \quad ; \quad \sqrt{6} = 2,4495 \quad ; \quad \pi = 3,1416$$

**1.**

Robb, il figlio primogenito di Lord Stark, ha tanti fratelli quante sorelle. Arya, la più piccola delle figlie di Lord Stark, invece, ha un numero di fratelli che è il triplo del numero delle sorelle. Quanti figli ha Lord Stark?

**Risposta: 5. Stark ha tre figli maschi e due femmine.**

**2.**

In quanti modi possiamo mettere in fila le lettere AAABBB in modo che non ci siano due "A" vicine?

**Risposta: 4. Le disposizioni possibili sono ABABAB, BABABA, ABBABA e ABABBA.**

**3.**

La data 11-02-2011 corrisponde a un numero palindromo (cioè letta al contrario rimane uguale). La prossima data palindroma sarà il 21-02-2012. Quale sarà la data ancora successiva con questa proprietà? Scrivere come risposta la somma delle sue cifre.

**Risposta: 8. Siccome il 31-02-2013 non esiste, la prossima data palindroma sarà 20-02-2020.**

4.

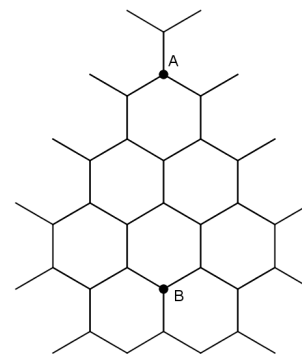
Lo stemma della nobile e potente casa dei Lannister, gli acerrimi nemici degli Stark, è un ottagono regolare dorato nel quale sono state tracciate tutte le diagonali che non sono perpendicolari ai lati. Quante sono queste diagonali?

**Risposta: 12.** Da ogni vertice di un ottagono regolare partono 5 diagonali, delle quali due sono perpendicolari ad un lato (anzi a due lati) e tre no. Quindi la diagonali non perpendicolari ai lati si possono ottenere in questo modo:

**$8$  (vertici)  $\times$   $3$  (diagonali da ogni vertice)  $: 2$  ( con la precedente moltiplicazione tutte le diagonali le abbiamo contate due volte)  $= 12$  diagonali.**

5.

Il pavimento del salone del castello degli Stark è formato da tanti esagoni regolari tutti uguali. Per andare dal punto A al punto B, che sono indicati nella figura, camminando in linea retta si percorrono 4,5 m. Quanti centimetri deve percorrere, almeno, la piccola Arya per andare da A a B camminando sui bordi degli esagoni?



**Risposta: 630.** La distanza tra due vertici opposti di un esagono regolare è uguale al doppio del suo lato. Quindi per andare da A a B in linea retta si percorre una distanza che è uguale a 5 lati di esagono. Questo ci dice che il lato degli esagoni è lungo  $450 : 5 = 50$  cm.

Per andare da A a B camminando sul bordo degli esagoni si devono percorrere almeno 7 lati, quindi 630 cm.

6.

Se il prodotto di quattro numeri naturali consecutivi vale 32760, qual è il più grande di questi numeri?

**Risposta: 15.** Se scomponiamo in fattori 32760 ci accorgiamo che è divisibile per 13.

**Riflettendo sul risultato della scomposizione in fattori, oppure con un po' di tentativi, si vede che**

$$32760 = 12 \times 13 \times 14 \times 15.$$

7.

La piccola Arya deve studiare i tre volumi della Storia degli Antichi Regni. Ciascun volume è di trecento pagine e Arya vorrebbe finire in 60 giorni, studiando in media quindici pagine al giorno. Arya riesce a leggere il primo volume ad una media di quindici pagine al giorno, ma il secondo volume lo legge ad una media di sole dieci pagine al giorno. Quante pagine al giorno dovrebbe leggere, mediamente, del terzo volume per poter concludere nei tempi prefissati?

**Risposta: 30.** Per leggere il primo libro Arya impiega  $300 : 15 = 20$  giorni.

Per leggere il secondo impiega  $300 : 10 = 30$  giorni.

Se vuole finire in 60 giorni deve leggere l'ultimo libro in dieci giorni, quindi deve leggere in media 30 pagine al giorno

8.

Nell'addizione

$$\begin{array}{rcccccc} A & B & C & D & + & \\ & & E & A & = & \\ \hline D & F & 1 & B & & \end{array}$$

a lettere diverse corrispondono cifre diverse. Quanto vale  $A+B+C+D+E+F$ ?

**Risposta: 29.**  $C+E$  deve dare un riporto, altrimenti nella colonna precedente sotto al  $B$  dovrebbe esserci un altro  $B$  e non  $F$  (ricordare che lettere diverse corrispondono a cifre diverse). Quindi  $C+E$  deve valere  $11$ . Anche  $B + 1$  deve dare un riporto, altrimenti nella prima colonna sotto ad  $A$  dovrebbe esserci un'altra  $A$  e non una  $D$ . Questo ci dice che  $B$  deve essere uguale a  $9$  ed  $F$  uguale a zero. Dall'ultima colonna poi si vede che  $D+A=9$ .

Quindi  $A+B+C+D+E+F=(A+D)+(C+E)+B+F=(9)+(11)+9+0=29$ .

9.

Il legno dell'Albero Diga, che cresce nel parco del castello degli Stark, è duro come il ferro ma molto più leggero, infatti un cubo di questo legno pesa la metà di un cubo di ferro delle stesse dimensioni. Se un cubo di legno di  $2$  dm di lato pesa  $6,4$  kg, quanti grammi pesa un cubo di ferro di lato  $10$  cm?

**Risposta: 1600.** Un cubo di  $20$  cm di lato ha lo stesso volume di otto cubi di  $10$  cm di lato. Quindi un cubo di legno di  $10$  cm di lato pesa  $6400 : 8 = 800$  g. Un cubo di ferro di  $10$  cm di lato pesa il doppio, quindi  $1600$  grammi.

10.

Quando sono in marcia i cavalieri di Lord Stark di solito si dispongono in fila per due, ma, se le strade sono abbastanza larghe, possono disporsi anche in fila per tre senza lasciar fuori nessuno. In realtà potrebbero disporsi anche in fila per quattro, per cinque e per sei, sempre senza lasciar fuori nessuno. Quando si preparano alla battaglia, invece, si dispongono in modo da formare un quadrato. Sapendo che i cavalieri sono meno di  $1000$ , riuscite a trovare quanti sono?

**Risposta: 900.** Il testo ci dice che il numero dei cavalieri è divisibile per due, per tre per quattro, per cinque e per sei. Quindi è divisibile per il minimo comune multiplo di questi numeri, che è  $60$ . Il testo ci dice anche che il numero dei cavalieri è un quadrato perfetto ed è minore di mille. L'unica possibilità è  $900=30^2$

11.

Nel castello degli Stark c'è un grande cortile interno rettangolare che ha i lati lunghi  $60$  metri e  $42$  metri. Il cortile è stato pavimentato con dei ciotoli di fiume, alcuni bianchi ed alcuni grigi, come in figura.

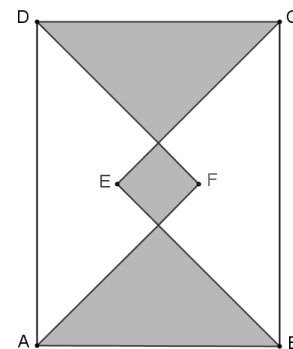
Sapendo che i triangoli  $AFD$  e  $BCE$  sono triangoli rettangoli isosceli, calcolare l'area in  $m^2$  della regione grigia.

**Risposta: 1044.** Il triangolo grigio in basso nella figura è la metà di un quadrato di cui  $AB$  è la diagonale. Quindi, questo triangolo ha la base lunga  $42$  m e l'altezza di  $21$  m. e la sua area vale  $(42 \times 21) : 2 = 441$  mq.

Il triangolo grigio in alto ha anch'esso area  $441$  mq.

Il quadrilatero grigio al centro della figura è un quadrato la cui diagonale è uguale all'altezza del rettangolo grande (quindi  $60$  m) meno le altezze dei due triangoli grigi (quindi  $2 \times 21 = 42$  m).

La diagonale del quadrato grigio misura allora  $60 - 42 = 18$  m e la sua area vale  $(18 \times 18) : 2 = 162$  mq. L'area della regione grigia diventa, infine,  $441 + 441 + 162 = 1044$  mq.



**12.**

Quanti sono i numeri di quattro cifre nei quali la cifra delle migliaia è uguale al prodotto delle altre tre cifre?

**Risposta: 44.** C'è un numero solo che inizia con 1 (il numero 1111), tre numeri che cominciano per 2 (sono 2211, 2121, 2112), tre numeri che cominciano per 3, per 5 e per 7. Ci sono poi sei numeri che cominciano per 4 (sono 4411, 4141, 4114, 4221, 4212, 4122) e sei numeri che cominciano per 9. Ci sono nove numeri che cominciano per 6 e, infine, ci sono dieci numeri che cominciano per 8.

**13.**

In ognuna delle sette caselle qua sotto ci va scritto un numero intero compreso tra 1 e 9 (due numeri sono già stati inseriti), in modo che la somma dei numeri contenuti in quattro caselle consecutive sia sempre la stessa e che la somma di tutti i numeri valga 34. Come risposta di questo problema scrivere i numeri contenuti nelle 4 caselle evidenziate.

1					3	
---	--	--	--	--	---	--

**Risposta: 3981.** Se la somma dei numeri contenuti in quattro caselle consecutive è sempre la stessa, allora nella prima e nella quinta casella ci deve essere lo stesso numero, quindi nella quinta casella ci deve essere un uno. Per lo stesso motivo nella seconda casella da sinistra ci deve essere un tre. Siccome la somma totale vale 34, nelle tre caselle che rimangono devono esserci dei numeri che hanno come somma 26. Questo significa che devono esserci due nove ed un otto.

1	3	9	8	1	3	
---	---	---	---	---	---	--

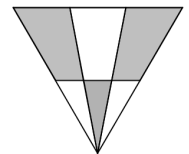
**14.**

Tutti i figli di Lord Stark da piccoli amavano giocare con le costruzioni. Il padre aveva ricavato le loro costruzioni dividendo un grosso cubo di legno in tanti piccoli cubetti tutti uguali. Mettendo tutti questi cubetti uno accanto all'altro su un solo strato era possibile formare un quadrato. Sapendo che i cubetti erano più di cento e meno di milleduecento, riuscite a trovare il loro numero?

**Risposta: 729.** Il testo del problema ci dice che il numero dei cubetti è sia un cubo perfetto che un quadrato perfetto. Questo è possibile solo se il numero dei cubetti è la sesta potenza di un numero intero. Tra cento e milleduecento l'unica possibilità è  $3^6 = 729$ .

**15.**

Nel vessillo della nobile casa dei Frey campeggia un triangolo come quello nella figura qui accanto. Si tratta di un triangolo equilatero nel quale un lato è stato diviso in tre parti uguali e gli altri due lati sono stati divisi in due parti uguali. Se l'area del triangolo equilatero è  $480 \text{ cm}^2$ , quanto vale in  $\text{cm}^2$  l'area della regione colorata di grigio?



**Risposta: 280.** Le tre regioni triangolari in basso nella figura formano un triangolo equilatero che ha il lato lungo la metà del lato del triangolo equilatero grande e quindi ha area uguale ad un quarto dell'area del triangolo grande (quindi  $120 \text{ cm}^2$ ). Le tre regioni triangolari in basso hanno tutte la stessa area, quindi l'area di ciascuna di esse vale  $40 \text{ cm}^2$ .

Se prendiamo uno dei tre triangolini che sta in basso nella figura e gli aggiungiamo la regione che gli sta sopra, otteniamo un triangolo che ha l'area uguale ad un terzo dell'area del triangolo equilatero grande, quindi  $160 \text{ cm}^2$ .

Allora, l'area di ciascuno dei tre quadrilateri in alto nella figura vale  $160 - 40 = 120 \text{ cm}^2$ . L'area della zona grigia diventa allora:  $120 + 120 + 40 = 280 \text{ cm}^2$ .

16.

punti 55

Il tributo che ogni anno gli Stark devono versare al Re è un numero di monete d'oro uguale al valore dell'espressione  $\frac{(a+b)c^2d^3}{efgh}$ , dove  $a, b, c, d$  sono dei numeri che cambiano ogni anno in

base alle richieste dei ministri, mentre  $e, f, g, h$  sono dei numeri che le divinità rivelano in sogno al Sommo Sacerdote. Quest'anno, sostituendo alle lettere il loro valore, si è ottenuto come risultato 2011 monete d'oro. Se l'anno prossimo i valori di tutte le lettere  $a, b, c, d, e, f, g, h$  verranno raddoppiati, quante monete d'oro dovrà versare Lord Stark al Re?

**Risposta: 8044.** Se raddoppiamo  $a$  e  $b$ , anche il valore di  $(a+b)$  raddoppia.

Se raddoppiamo  $c$ , il valore di  $c^2$  viene moltiplicato per 4 e, se raddoppiamo  $d$ , il valore di  $d^3$  viene moltiplicato per 8. Quindi, raddoppiando il valore delle lettere che stanno a numeratore, il numeratore viene moltiplicato per  $2 \times 4 \times 8 = 64$ .

In modo analogo, se raddoppiamo il valore delle lettere che stanno a denominatore, il denominatore viene moltiplicato per  $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ . Mettendo assieme questi due risultati si ricava che la frazione viene moltiplicata per  $64:16 = 4$ . Il risultato del problema è  $2011 \times 4$

17.

punti 60

Arya ha disegnato per il fratellino Rickon una casetta sulla sabbia. Si tratta di un rettangolo di base 150 cm ed altezza 220 cm, sul quale c'è un tetto di forma triangolare coi lati lunghi 150 cm, 150 cm e 180 cm. Il tetto si appoggia su uno dei suoi due lati lunghi 150 cm.

Quanti cm è alta la casetta?

**Risposta: 364.** Il numero cercato è  $220 + h$ , dove  $h$  è l'altezza del triangolo quando usiamo come base uno dei lati lunghi 150 cm. Se usiamo come base del triangolo il lato lungo 180 cm, il teorema di Pitagora ci dice che l'altezza del triangolo (relativa a questa base) è

$$\sqrt{150^2 - 90^2} = 120 \text{ cm.}$$

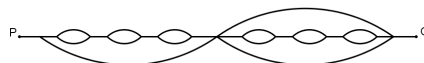
Ora possiamo ricavare l'altezza  $h$ : avremo  $h = (180 \times 120) : 150$ , che significa doppio dell'area diviso la base.

Quindi  $h = 144$ .

18.

punti 60

Le linee disegnate nella figura qui sotto rappresentano i sentieri dell'antico parco del castello degli Stark. Muovendosi solo da sinistra verso destra, quante strade diverse si possono percorrere per andare dal punto P al punto Q? Due strade si considerano diverse anche se differiscono solo per un piccolo tratto.



**Risposta: 90.** Per andare da P al punto in cui si incontrano i tre archi lunghi abbiamo 9 strade (ci sono  $8 = 2 \times 2 \times 2$  strade che percorrono i cerchietti piccoli ed una strada che è l'arco grande a sinistra in basso). Per andare dal punto in cui si incontrano i tre archi lunghi a Q abbiamo 10 strade (8 strade passano per i tre cerchietti piccoli ed altre due sono date dai due archi lunghi sulla destra della figura). In totale ci sono allora  $9 \times 10 = 90$  strade.

19.

punti 70

Supponiamo di avere un numero le cui cifre sono solo zero o uno e di modificarlo con queste regole:

- se leggendolo da sinistra a destra incontriamo due cifre "1" consecutive, allora tra di esse inseriamo uno zero;

- se leggendolo da sinistra a destra troviamo una cifra "0" immediatamente seguita da un "1", allora tra queste due cifre inseriamo un uno.

Usando entrambe queste regole, partendo dal numero 11 otteniamo i numeri elencati qui di seguito:

11  
101  
1011  
101101  
.....

Continuando in questo modo, quante cifre "0" ha il nono numero di questo elenco?

**Risposta: 21. Scrivendoli con molta attenzione, i numeri successivi dell'elenco sono:**

**101101011 (ha 3 cifre zero),**

**10110101101101 (ha 5 cifre zero)**

**1011010110110101101011 (ha 8 cifre zero)**

**1011010110110101101011010110101101101 (ha 13 cifre zero)**

**10110101101101011010110101101011010110101101011010110101101011 (ha 21 cifre zero)**

**Se si nota che i numeri degli zeri dei numeri dell'elenco sono i numeri di Fibonacci (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... ogni numero si ottiene sommando i due che lo precedono), si intuisce che nel numero successivo ci saranno 34 (= 13+21) cifre zero, poi 55 (=34+21) cifre zero ecc...**

**20. punti 70**

Dopo tante battaglie i cavalieri degli Stark sono molto diminuiti. Ora il loro numero è un numero di tre cifre che letto al contrario è uguale a se stesso moltiplicato per  $\frac{9}{2}$ . Quanti sono i cavalieri?

**Risposta: 198. Il nostro numero moltiplicato per nove mezzi deve dare un numero intero, quindi deve essere divisibile per due. Inoltre il numero letto al contrario è divisibile per nove, quindi anche il nostro numero è divisibile per nove. Allora il numero che stiamo cercando è un numero pari divisibile per nove. Inoltre il numero è minore di duecento, altrimenti moltiplicandolo per nove mezzi otterremmo un numero di quattro cifre. Facendo qualche tentativo si trova che 198 va bene.**

**21. punti 80**

Dopo la morte di Re Robert, gli Stark e le altre più potenti famiglie del regno si sono combattuti in una lunga guerra civile. Ora, giunte allo stremo dopo tanti anni di guerra, queste famiglie hanno deciso di deporre le armi e di decidere a chi spetti la successione con una gara (individuale) di matematica, alla quale ognuna delle famiglie ha mandato sette concorrenti. Il miglior classificato dei Lannister è arrivato esattamente a metà classifica (nel senso che i concorrenti che gli sono arrivati davanti sono tanti quanti quelli che gli sono arrivati dietro), il secondo dei Lannister è arrivato cinquantesimo e il peggiore dei Lannister è arrivato ottantaduesimo. Quanti concorrenti hanno partecipato alla gara?

**Risposta: 91. Vediamo le informazioni che ci vengono date dal testo:**

- Ogni famiglia manda sette concorrenti. Questo significa che il numero che cerchiamo è multiplo di sette.
- Il miglior classificato dei Lannister è arrivato esattamente a metà classifica: quindi i concorrenti sono in numero dispari.
- Il secondo dei Lannister è arrivato cinquantesimo: quindi il concorrente che è arrivato a metà classifica è arrivato prima, ed allora i concorrenti sono meno di cento.
- Il peggiore dei Lannister è arrivato ottantaduesimo: quindi i concorrenti sono almeno ottantadue.

**In conclusione, dobbiamo trovare un multiplo di sette che sia dispari e che sia compreso tra ottantadue e cento. L'unico numero possibile è 91.**