Kangourou Italia

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI MODENA E REGGIO EMILIA
Dipartimento di Fisica, Informatica e Matematica

PIANO LAUREE SCIENTIFICHE
Orientamento e Formazione degli Insegnanti

Gara a squadre di matematica per le scuole medie
PLAY - 5 Aprile 2014

Istruzioni

- Le risposte ai problemi sono dei numeri interi compresi tra 0 e 9999.
- Se il risultato di un problema dovesse essere più grande di 9999 scrivere come soluzione 9999.
- Se il risultato è un numero negativo scrivere come soluzione 0000.
- Se il problema è impossibile scrivere 0000.
- Se la soluzione non è un numero intero scrivere come soluzione il numero trovato senza la parte decimale (ad esempio, se la soluzione fosse 3224,75 scrivete 3224).
- Se servissero, usare le seguenti approssimazioni:
  $\sqrt{2} = 1{,}414$; $\sqrt{3} = 1{,}732$; $\sqrt{5} = 2{,}236$; $\pi = 3{,}142$

Gara a squadre di matematica per le scuole medie
PLAY - 5 Aprile 2014

1. Famiglia numerosa [0013]

La nonna materna di Marchino ha 32 nipoti e la nonna paterna ne ha 14. Quanti fratelli ha al massimo Marchino?

I fratelli di Marchino sono tutti nipoti della sua nonna paterna, quindi al massimo possono essere 13, cioè 14 meno Marchino.

2. Parentesi ballerine [0051]

Nello scrivere l'uguaglianza 200 – 1 – 1 – 1 – 1 -…..- 1 = 100, dove a primo membro il termine "-1" compare 200 volte, ci siamo dimenticati di scrivere una parentesi tonda aperta ed una chiusa. Tra queste due parentesi, quante volte deve comparire la cifra "1" se vogliamo che l'uguaglianza sia vera?

Vediamo quanto vale il primo membro se mettiamo alcuni degli "1" tra parentesi: se nella parentesi ci fossero due "1" il primo membro varrebbe 2, cioè 100 - (0) – 198; se nella parentesi ci fossero tre "1" il primo membro varrebbe 4, cioè 100 – (-1) – 197 mentre se ci fossero quattro "1" il primo membro varrebbe 100 – (-2) – 196 = 6.

Ogni volta che aggiungiamo un "1" dentro la parentesi il risultato aumenta di 2. Se vogliamo arrivare a 100 bisogna che gli "1" tra parentesi siano 51.

3. Compleanni ravvicinati [2041]

Oggi, 5 aprile 2014, i 23 ragazzi della I B sono venuti a PLAY a festeggiare assieme il loro compleanno. Infatti, sono tutti nati nell'aprile del 2002, anche se in giorni tutti diversi. In quale anno la somma delle loro età sarà uguale a 884 anni?

Poiché 884 : 23 = 38,4…, la somma delle età sarà 884 quando tutti avranno compiuto 38 anni e qualcuno ne avrà compiuti 39. Questo potrà accadere solo nel 2041.

4. Né primo né divisore [0022]

Qual è il più piccolo numero intero non primo che non divide 1x2x3x4x5x6x7x8?

5. Dado speciale [1246]

Marchino ha comprato due dadi a sei facce identici, ma un po' particolari. Su ciascuna delle sei facce di ogni dado c'è un numero intero composto da una sola cifra diversa da zero, mentre la somma dei numeri che stanno su due facce opposte è sempre 10. Tirando i due dadi e sommando i numeri usciti si possono ottenere come risultato tutti i numeri compresi tra 2 e 18 (2 e 18 inclusi).

Quali sono le quattro cifre più piccole che stanno sulle facce di uno di questi dadi? Dare la risposta scrivendole dalla più piccola alla più grande. (Ad esempio se si pensa che il dado abbia sulle sue facce le cifre 1,3,5,5,7,9 rispondere con 1355.).

Sui dadi ci deve essere la cifra “1”, altrimenti non si potrebbe ottenere 2 come somma, e ci deve essere anche il “2”, altrimenti sarebbe impossibile ottenere 3 come somma. Sulla faccia opposta all’ ”1” ci sta il “9” e su quella opposta al “2” ci sta l’ ”8”, perciò dobbiamo solo capire cosa c’è sulle due facce rimanenti:
- il dado 1,2,3,,7,8,9 non permette di ottenere la somma 7.
- il dado 1,2,4,6,8,9 va bene.
- il dado 1,2,5,,5,8,9 non permette di ottenere la somma 8.

6. L'addizione sbagliata [0056]

L’addizione scritta qui di fianco è sbagliata, ma può diventare corretta se in essa al posto di una certa cifra, tutte le volte che compare, se ne mette un’altra (sempre la stessa). Quanto vale il prodotto tra la cifra da sostituire e quella che si usa per sostituirla?

	7	3	8	6	5	8	+
	3	8	9	4	6	0	=
1	1	1	8	1	1	8	

Partiamo dall’ultima colonna a destra: lo “0” deve essere giusto, altrimenti i conti non tornerebbero, mentre al posto dell’ “8” potrebbe esserci qualunque altro numero e la somma dell’ultima colonna sarebbe comunque corretta. L’ultima colonna non dà riporto, quindi il “5” ed il “6” e l’ “1” nella penultima colonna devono essere giusti perché se ne cambiamo uno i conti non tornano più. Tenendo conto del riporto, anche le cifre nella terz’ultima colonna devono essere giuste. La colonna successiva , la terza da sinistra, diventa sbagliata se cambiamo il “9” con qualcos’altro, ma rimane giusta se al posto dell’ “8” mettiamo qualsiasi altra cifra e, qualunque sia questa cifra, avremo sempre un riporto di uno, perciò uno dei numeri nella secondo colonna da sinistra deve esser sbagliato. In particolare, nella seconda colonna potrebbe succedere che:
- al posto di “1” nella somma ci sia un “2” (ma questo è impossibile perché la cifra “1” l’avevamo incontrata in altre colonne ed era giusta)
- al posto del “3” potrebbe esserci un “2”)ma questo è impossibile perché non tornerebbero i conti nella prima colonna)
- al posto dell’ “8” potrebbe esserci un “7” (questo è il numero giusto da sostituire perché tutti i conti tornano).

7. Fattori primissimi [0010]

Partendo da un numero intero *a*, costruiamo un nuovo numero *b* in questo modo: se scomponiamo *a* come prodotto di fattori primi, allora *b* è il prodotto dei numeri che si ottengono aggiungendo 1 a ciascuno di questi fattori.
Ad esempio, se prendiamo *a* = 60 = 2x2x3x5, allora *b* = 3x3x4x6 = 216.
Quanti numeri *a* maggiori di 1 e minori di 100 sono tali che il numero *b* ottenuto in questo modo sia una potenza di 2?
Se *b* è una potenza di 2 bisogna che i numeri dei quali è il prodotto siano tutti delle potenze di due. Quindi fattori primi di *a* devono essere tali che si ottenga una potenza di 2 quando li aumentiamo di 1. Gli unici numeri primi minori di 100 che hanno questa proprietà sono 3, 7 31. I numeri *a* minori di 100 che hanno solo questi fattori primi sono 3, 7, 9 (= 3x3), 21 (= 3x7), 27 (=3x3x3), 31, 49 (= 7x7), 63 (= 3x3x7), 81 (=3x3x3x3) e 93 (= 3x31), cioè 9 in tutto.

8. Sdoppi e raddoppi [0087]

Prendiamo tutti i numeri interi positivi minori od uguali a 100, raddoppiamoli se sono dispari e dividiamoli per due se sono pari. Alla fine, tra i numeri che otteniamo in questo modo, quanti saranno i numeri distinti?
Dimezzando i numeri pari si ottengono tutti i numeri minori o uguali a 50. A questi vanno aggiunti i numeri maggiori di 50 che si ottengono raddoppiando i dispari. Raddoppiando i dispari si ottengono 50 numeri distinti, dei quali esattamente 13 sono minori od uguali a 50 e 37 sono maggiori di 50. Quindi il risultato è 50 +37.

9. Multipli e quadrati [8712]

Consideriamo i numeri di quattro cifre che hanno queste proprietà:
- sono multipli di 11.
- La somma delle loro cifre è un quadrato perfetto.

Qual è la differenza tra il più grande di questi numeri che non ha tutte le cifre uguali ed il più piccolo di essi che ha tutte le cifre diverse?
Il risultato è 9790 – 1078 = 8712

10. L'orario delle lezioni [0030]

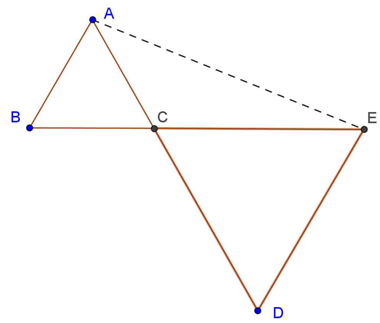
I ragazzi della I A sono molto contenti di essere venuti a PLAY, anche perché oggi avrebbero avuto sei ore di lezione: due ore di Matematica, due di Italiano, un'ora di Inglese ed una di Religione. Trovare in quanti modi diversi potrebbero essere state disposte queste ore di lezione sapendo che:
- le ore di Matematica sono una di seguito all'altra e non sono a cavallo dell'intervallo (che è tra la terza e la quarta ora di lezione).
- l'ora di Religione non è né la prima né la sesta.

Contiamo le possibilità distinguendo vari casi in base a dove sono sistemate le ore di matematica.
- Se le ore di matematica sono la prima e la seconda, allora l'ora di religione può essere sistemata in tre modi (terza, quarta o quinta ora) e, una volta fissata l'ora

di religione ci sono tre possibilità per l'ora di Inglese, mentre le rimanenti ore sono di Italiano. Ci sono allora 3x3=9 possibilità in questo caso.
- Allo stesso modo ci sono 9 possibilità di distribuire le ore nel caso che le ore di Matematica siano la quinta e la sesta.
- se le ore di Matematica sono la seconda e la terza, allora per la Religione abbiamo solo due possibilità e, una volta fissata l'ora di Religione ci sono tre possibilità per l'ora di inglese, poi le altre ore sono di Italiano. In tutto ci sono allora 2x3 = 6 possibilità.
- Anche se le ore di Matematica sono la quarta e la quinta ci sono 6 possibilità.
In tutto, allora, ci sono 9+9+6+6 = 30 possibilità per costruire un orario che rispetti le richieste del problema.

11. Un triangolo tra triangoli [0303]

In figura, i punti B, C ed E sono allineati, i triangoli ABC e CDE sono equilateri e la loro area misura, rispettivamente, 101 e 909 centimetri quadrati. Quanti centimetri quadrati misura l'area del triangolo CEA?



L'area del triangolo CDE e nove volte quella di
ABC, quindi il lato di CDE è il triplo di quello di ABC. Il triangolo CEA ha la stessa altezza di ABC ma ha la base CE che misura il triplo di BC, quindi la sua area è il triplo dell'area di ABC

12. Numeri civici [0226]

Marchino abita in una strada in cui ci sono tante villette. Ogni villetta ne ha un'altra identica posta di fronte, sull'altro lato della strada. Come al solito le case su un lato sono numerate con numeri pari e quelle sull'altro coi dispari. Il numero della casa di Marchino ha tre cifre. Sullo stesso lato della strada in cui abita Marchino abita suo zio e le loro case sono separate da quattro villette nelle quali, per il momento, non abita nessuno. Di fronte a casa di Marchino abita il suo amico Bruno. Sapendo che il numero della casa di Bruno è un quadrato perfetto e che il numero della casa dello zio di Marchino è un cubo perfetto, dire qual è il numero di casa di Marchino.
I possibili numeri di casa dello zio di Marchino sono i cubi perfetti, cioè 125, 216, 341, 512, 729. Il numero di casa di Marchino è 10 in memo o dieci in più di uno di questi numeri ed il numero del suo amico è uno in più od uno in meno del numero di casa di Marchino. Quindi il problema chiede di trovare un quadrato perfetto ed un cubo perfetto che differiscano tra loro di 9 oppure di 11. L'unica possibilità è che i numeri siano 216 = 6^3 e 225 = 15^2. Marchino abita al 226.

13. L'incasso di PLAY [0075]

L'anno scorso erano in vendita dei biglietti speciali per l'ingresso a Play che costavano 25 euro. La cifra ricavata dalla vendita di questi biglietti è stata diviso in questo modo: dodicimila euro sono serviti per pagare le tasse, tre euro sono serviti per comprare una marca da bollo e i quattro Enti organizzatori di PLAY si sono divisi in parti uguali quel che rimaneva, ricevendo un numero intero di euro ciascuno. Quali erano le ultime due cifre dell'incasso?

L'incasso è un multiplo di 25, quindi le sue due ultime cifre possono essere solo 00, 25, 50 oppure 75. Quando togliamo dodicimila euro le ultime cifre non cambiano, mentre, quando ne togliamo altri 3, le ultime due cifre possono diventare solo 97, 22, 47 oppure 72. Tra i numeri che finiscono con queste cifre, solo quelli che finiscono per 72 sono divisibili per 4.

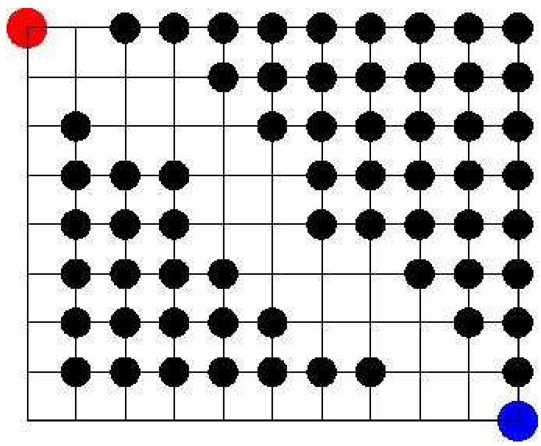
14. Un insolito solido [0386]

Dire quanti centimetri quadrati può valere, al massimo, l'area della superfice totale (cioè la somma delle aree di tutte le facce) di un solido che ha queste proprietà:
- ha cinque facce
- le facce sono tutte dei poligoni regolari
- le sue facce triangolari (se ce ne sono) hanno il lato lungo 10 cm.

Ci sono solo due solidi che soddisfano le richieste del problema: uno è la piramide a base quadrata e con quattro facce triangolari, mentre l'altro è il prisma che ha due basi triangolari tenute assieme da tre facce quadrate. Quest'ultimo è quello che ha la superficie totale con l'area più grande.
L'area di un triangolo equilatero di lato *l* vale (*(radice di tre) : 4)* $\cdot$ *l^2* , quindi la somma delle aree di due triangoli equilateri e tre quadrati di lato 10 cm vale 386 centimetri quadrati.

15. Padiglione K [0033]

Nella figura qui accanto è rappresentato il Padiglione K di PLAY. Il pallino grosso in alto a sinistra è la posizione attuale di Marchino. I segmenti rappresentano le zone dove Marchino può camminare, mentre il pallino grosso in basso a destra è lo stand dove Marchino vuole andare perché lì si vende il gioco che desidera acquistare. Gli altri pallini indicano degli stand dai quali Marchino non vuole passare perché sa che non resisterebbe alla tentazione di acquistare qualcosa. Quanti diversi percorsi può scegliere Marchino se vuole percorrere la strada più breve possibile per arrivare alla sua destinazione?



Per andare dal punto in alto a sinistra a quello in basso a destra, le strade più brevi sono quelle che ci fanno spostare solo verso destra o verso il basso. Tutte queste strade sono lunghe 15 "trattini", cioè 15 lati dei quadratini che compongono la griglia in figura. Di queste strade ce n'è esattamente una che passa per l'angolo in basso a sinistra (cioè quella composta dall'intero lato di

sinistra e poi da quello in basso della griglia). Ci sono poi molte strade che passano nella zona in diagonale libera tra i pallini. Se vogliamo percorrere una di queste strade, possiamo partire in due modi: percorrendo un trattino verso il basso seguito da uno verso destra, oppure percorrendo un trattino verso destra seguito da uno verso il basso. Qualunque delle due scelte abbiamo fatto, a questo punto dobbiamo percorrere un trattino verso destra e poi abbiamo di nuovo due possibilità (muoverci di un trattino verso il basso e poi uno a destra, o viceversa). Ogni volta che incontriamo un punto in cui ci sono due possibilità per proseguire dobbiamo moltiplicare per due il numero delle possibili strade, così il numero delle strade che scendono in "diagonale" è 2x2x2x2x2x2=32. A queste va aggiunta l'unica altra strada che avevamo contato prima.

16. Spending review [0024]

Dopo che il Borgomastro ha venduto tutte le auto blu, i suoi aiutanti sono dovuti venire a PLAY con mezzi di fortuna: alcuni sono venuti in bicicletta, altri in tandem ed altri in sidecar. Ciascun tandem ha due ruote ed ha portato a PLAY due persone, mentre ogni sidecar ha tre ruote ed ha portato due persone. Sulle biciclette è vietato salire in due. L'addetto ai parcheggi ha notato che in questo modo sono arrivate 132 persone con 99 mezzi di trasporto che hanno in tutto 219 ruote. Quante persone sono arrivate in tandem?

Se tutti i mezzi arrivati avessero due ruote, in tutto ci sarebbero 2x99 = 198 ruote, e siccome le ruote sono 219, cioè 21 in più, devono esserci 21 sidecar Se non ci fossero biciclette, con ogni mezzo sarebbero arrivate due persone, perciò in tutto dovrebbero essere arrivate 198 persone. Siccome di persone ne sono arrivate 132 = 198 – 66, bisogna che le biciclette siano 66. Quindi i tandem sono 99 – 21 – 66 = 12 ed hanno portato 24 persone.

17. Un'aiuola intelligente [0034]

Per svoltare dal viale principale nella strada in cui abita Marchino, bisogna passare accanto ad un'aiuola che ha la forma di un triangolo ABC, con i lati che misurano tutti un numero intero di metri. Il lato AB misura 20m, il lato BC misura 21m e, per agevolare il traffico, l'aiuola è stata costruita in modo che l'angolo in A sia acuto. Quante sono le possibili misure che può avere il lato AC?

Se l'angolo in A fosse retto, il teorema di Pitagora ci direbbe che il lato AC dovrebbe essere lungo tra i 6 e 7 cm, quindi se l'angolo in A è acuto bisogna che il lato AC sia lungo almeno 7 cm. Inoltre il lato AC deve essere più corto di 41 cm, altrimenti il triangolo diventerebbe un segmento. Il lato AC può quindi avere come lunghezza un qualunque dei numeri 7, 8, 9, …., 39, 40.

18. Chioschi sì, chioschi no! [0021]

x		

Lo schema qua di fianco rappresenta il parco di una lontana città del Nord, che, pur essendo molto bello, di sera ha un aspetto un po' solitario. Così, il Borgomastro ha deciso di farvi costruire uno o più chioschi per attirare gente. Ciascuna delle caselle rappresenta una posizione dove potrebbe essere costruito un chiosco. Il primo chiosco sarà certamente costruito nella casella in alto a sinistra. Quanti diversi modi ci sono per mettere i chioschi se, per salvaguardare il verde pubblico, il Borgomastro ha deciso che non se ne possano costruire due su caselle che hanno un lato in comune?

Se nella casella centrale ci fosse un chiosco, gli altri eventuali chioschi potrebbero stare solo nelle tre caselle negli angoli della griglia e in quelle tre caselle possiamo mettere dei chioschi in otto possibili modi: potremmo non metterci nessun chiosco, potremmo metterci esattamente un chiosco (ci sono tre possibilità), potremmo mettere due chioschi (ancora tre possibilità), oppure potremmo metterci tre chioschi (c'è un solo modo per farlo). Se non ci sono chioschi nella casella centrale, allora gli altri eventuali chioschi possono essere solo nelle caselle in basso o in quelle a destra. In queste caselle ci potrebbero essere:

- tre chioschi (in un modo solo).
- due chioschi (ci sono 6 modi per metterceli).
- un chiosco (ci sono 5 possibilità).
- 0 chioschi (un modo solo).

In tutto le possibili disposizioni dei chioschi sono 21.

Gara a squadre per le scuole medie
5 Aprile 2014
risposte

	Problema	Soluzione
1	Famiglia numerosa	0013
2	Parentesi ballerine	0051
3	Compleanni ravvicinati	2041
4	Né primo né divisore	0022
5	Dado speciale	1246
6	L'addizione sbagliata	0056
7	Fattori primissimi	0010
8	Sdoppi e raddoppi	0087
9	Multipli e quadrati	8712
10	L'orario delle lezioni	0030
11	Un triangolo tra i triangoli	0303
12	Numeri civici	0226
13	L'incasso di PLAY	0075
14	Un insolito solido	0386
15	Padiglione K	0033
16	Spending review	0024
17	Un'aiuola intelligente	0034
18	Chioschi sì, chioschi no	0021